

INTERNATIONAL SOCIETY FOR SOIL MECHANICS AND GEOTECHNICAL ENGINEERING



This paper was downloaded from the Online Library of the International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering (ISSMGE). The library is available here:

<https://www.issmge.org/publications/online-library>

This is an open-access database that archives thousands of papers published under the Auspices of the ISSMGE and maintained by the Innovation and Development Committee of ISSMGE.

Calcul analytique des contraintes sous une plaque rigide en fonction de la nature et de l'état du sol

Analytical calculation of stresses below a rigid plate, accounting for the nature and state of the soil

H. Ejjaouani, V. Shakhirev

Laboratoire Public d'Essais et d'Études (LPEE), Casablanca, Maroc

J.-P. Magnan

Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC), Paris, France

RÉSUMÉ

Cette communication présente un modèle tridimensionnel de calcul dans lequel les dimensions de la zone influencée par une charge surfacique sont définies par un angle de diffusion des contraintes β , qui dépend de la nature du sol et de certaines caractéristiques d'état comme la densité et l'indice des vides. La répartition des incréments de contrainte verticale dans chaque plan horizontal du massif de sol est décrite par une loi polynômiale du troisième degré. Des expressions analytiques sont données pour le cas d'une semelle rigide circulaire et celui d'une semelle rigide rectangulaire, ainsi que des exemples de calcul.

ABSTRACT

This paper presents a three-dimensional stress calculation model in which the dimensions of the influence zone of a surface load are defined by a stress diffusion angle β , which depends on the nature of the soil and on some of its geotechnical characteristics, such as density and void ratio. The variations of the vertical stress increments on each horizontal plane of the soil mass are described by a third order polynomial equation. Analytical solutions are given for the case of a circular rigid plate and for the case of a rectangular rigid plate. Examples of numerical calculations are presented, too.

Mots-clés : Semelle rigide, incrément de contrainte, diffusion, formule analytique, exemple

Keywords : Rigid plate, stress increment, diffusion, analytical formula, example.

1 INTRODUCTION

Le calcul des déformations des sols sous les fondations superficielles nécessite d'estimer la diffusion des charges dans le sol. Ce problème a suscité de nombreuses études expérimentales au cours du 20^{ème} siècle mais sans résoudre vraiment le problème, faute de pouvoir mesurer précisément les contraintes verticales dans un massif de sol. Les méthodes courantes pour ce type de calcul sont fondées sur la théorie de l'élasticité (abaques dérivés de la solution de Boussinesq ou calculs en éléments finis) ou sur une hypothèse de répartition des contraintes sur une zone dont la dimension augmente proportionnellement à la profondeur (figure 1).

Les formules de calcul présentées ci-après sont dérivées du modèle de la figure 1. Le plus simple des modèles de diffusion des contraintes est celui que décrivent Holtz et Kovacs (1991) où l'angle β est constant ($\tan \beta = 0,5$, soit $\beta = 26,6$ degrés) et l'incrément de contrainte verticale est uniforme sur la surface rectangulaire de côtés $(a+2z\tan\beta)$ et $(b+2z\tan\beta)$. Il est reconnu que cette uniformité répartit exagérément les charges, qui sont en réalité plus faibles sur les bords qu'à la verticale de la zone chargée. Le calcul par la théorie de l'élasticité isotrope étend pour sa part exagérément la zone d'influence des charges de surface, tandis que le modèle des réactions locales de Winkler les concentre trop. Beaucoup de chercheurs considèrent aussi maintenant qu'un modèle unique ne suffit pas pour décrire la diversité des comportements des sols qui existent dans la nature.

Cette communication développe une voie intermédiaire, où les dimensions de la zone d'influence S_z dépendent d'un angle β lié à la nature et à l'état du sol et la répartition horizontale des contraintes est une fonction polynomiale de x et y .

2 ÉVALUATION DE L' ANGLE DE DIFFUSION β

Les essais de chargement par des plaques rigides posées à la surface du sol montrent que le tassement du sol est produit par

des déplacements principalement verticaux des particules, avec de faibles composantes horizontales près du bord de la plaque (Kurduvov, 1891). Cela témoigne du fait que le sol proche de la plaque a une faible capacité de diffusion des contraintes dans le massif et que l'angle de diffusion β y est plus faible que l'angle de frottement interne ϕ . Lorsque la profondeur et la résistance du sol à la pression augmentent, les trajectoires des particules s'écartent de plus en plus vers le côté et la valeur de l'angle β augmente et tend vers l'angle de frottement interne ϕ .

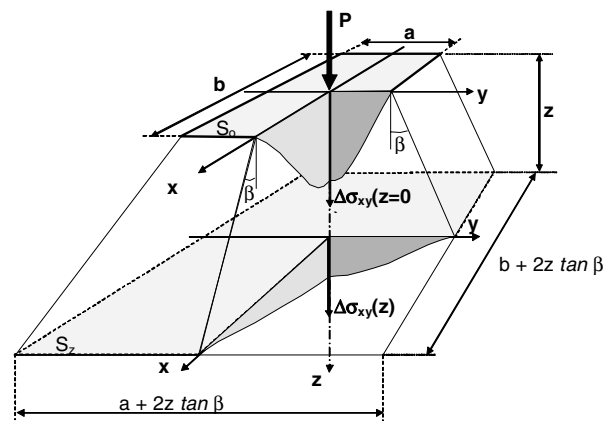


Figure 1. Schéma de principe du modèle de calcul de la diffusion des contraintes sous une plaque rigide rectangulaire

Dans la zone du massif la plus chargée, près de la surface, on va observer des déformations irréversibles de la structure du sol différant des solutions élastiques, tandis que les déformations seront élastiques au-dessous. Nous allons pour cette raison diviser le sol en deux zones : dans la zone supérieure, l'angle de diffusion β dépend de la profondeur tandis que, dans la zone inférieure, il est constant et égal à l'angle de frottement interne ϕ , qui ne dépend que du type et de l'état du sol.

La zone des déformations irréversibles peut être limitée à la profondeur où la charge ne peut plus repousser le sol vers la surface. Cette profondeur peut être déduite de la solution connue de Prandl (1920) et Reissner (1924), modifiée en :

$$p = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \left(\gamma z_{pl} \exp(\pi \tan \varphi) + \frac{c}{\tan \varphi} \right) - \frac{c}{\tan \varphi} \quad (1)$$

On peut résoudre cette équation en z_{pl} , ce qui donne

$$z_{pl} = \frac{p(1 - \sin \varphi) - 2c \cos \varphi}{\gamma(1 + \sin \varphi)} \exp(-\pi \tan \varphi) \quad (2)$$

avec p et c - charge limite et cohésion du sol, φ et γ - angle de frottement interne et poids volumique du sol.

Connaissant z_{pl} , on peut définir la loi de variation de l'angle de diffusion β entre la surface où il est nul et la profondeur z_{pl} où il est égal à φ . Nous adoptons la loi suivante, qui dépend de l'indice des vides e du sol :

$$\beta = \varphi \left(\frac{z}{z_{pl}} \right)^e \quad \text{pour } 0 \leq z \leq z_{pl}, \quad (3a)$$

$$\beta = \varphi \left(\frac{z}{z_{pl}} \right)^{e-1} \quad \text{pour } z_{pl} \leq z. \quad (3b)$$

Si l'on introduit l'expression (3a) de l'angle β dans la formule de calcul de l'incrément moyen des contraintes à la profondeur z dans le schéma de diffusion de la figure 1, on obtient :

$$\Delta\sigma(z) = \frac{ab\sigma_a}{(a + 2z \tan \beta)(b + 2z \tan \beta)}$$

$$\Delta\sigma(z) = \frac{ab\sigma_a}{\left\{ a + 2z \tan \left[\varphi \left(\frac{z}{z_{pl}} \right)^e \right] \right\} \left\{ b + 2z \tan \left[\varphi \left(\frac{z}{z_{pl}} \right)^e \right] \right\}} \quad (4)$$

Compte tenu de l'équation (2), l'expression (4) décrit une loi de diffusion des charges dans un massif de sol qui dépend de quatre propriétés géotechniques du sol : l'indice des vides e , le poids volumique γ , la cohésion c et l'angle de frottement interne φ .

3 CALCUL DES CONTRAINTES SOUS UNE PLAQUE RIGIDE CIRCULAIRE

Considérons la plaque rigide circulaire de rayon r_0 représentée sur la figure 2. La distribution classiquement retenue pour la distribution des incréments de contraintes verticales à la profondeur z peut être approchée par l'expression suivante (Berezantsev et al., 1961) :

$$\Delta\sigma(z, \rho) = \Delta\sigma(z, 0) \left[1 - 3 \left(\frac{\rho}{r_0 + z \tan \beta} \right)^2 + 2 \left(\frac{\rho}{r_0 + z \tan \beta} \right)^3 \right] \quad (5)$$

La valeur inconnue de $\Delta\sigma(z, 0)$ peut être déduite de l'équilibre de la charge appliquée sur la semelle rigide et de l'incrément de contrainte verticale à la profondeur z .

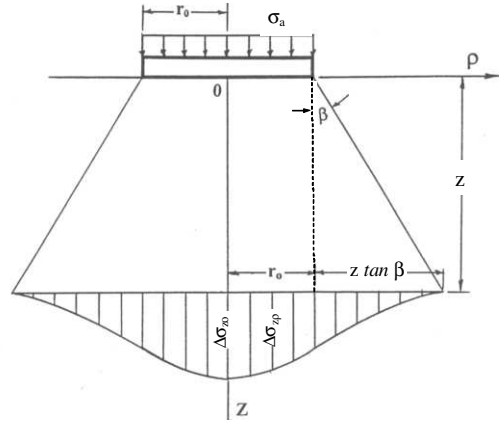


Figure 2. Schéma de calcul des contraintes sous une semelle circulaire

On obtient :

$$\Delta\sigma(z, 0) = \frac{\sigma_a r_0^2}{0,3(r_0 + z \tan \beta)} \quad (5a)$$

Les équations (5) et (5a) permettent de calculer les distributions des incréments de contraintes en tenant compte de la variation de l'angle de diffusion β avec la profondeur.

À titre d'exemple, nous avons calculé la diffusion d'une charge uniforme de $\sigma_a = 300$ kPa, appliquée sur une plaque rigide d'un mètre de rayon, pour une argile d'angle de diffusion $\beta = \varphi = 20$ degrés et pour un sable d'angle de diffusion $\beta = \varphi = 40$ degrés. Les résultats sont présentés sur la figure 3.

On note sur cette figure que la distribution des contraintes de contact sous la plaque rigide ne dépend pas de la valeur de l'angle de diffusion. Cette indépendance traduit la prédominance du mécanisme de déformation plastique irréversible au contact direct de la semelle.

La forme de la distribution des contraintes de contact sous la semelle rigide fait que la valeur maximale au centre est nettement plus élevée que la valeur moyenne. La formule (5a) permet d'évaluer le coefficient de concentration des contraintes λ , qui est le rapport de la valeur maximale de l'incrément de contrainte verticale à la profondeur z à la valeur moyenne de l'incrément de contrainte verticale à la même profondeur et qui vaut $1/0,3$.

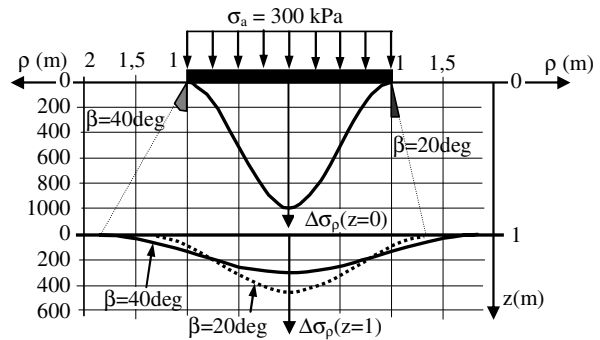


Figure 3. Diffusion des contraintes sous une plaque rigide circulaire, pour deux valeurs de l'angle β (20 degrés et 40 degrés)

4 CALCUL DES CONTRAINTES SOUS UNE PLAQUE RIGIDE RECTANGULAIRE

Dans le cas d'une charge de forme rectangulaire, telle que représentée sur la figure 1, nous avons retenu de décrire la distribution des incréments de contrainte verticale à la profondeur z sous la forme d'un polynôme de degré trois en x et en y :

$$\Delta\sigma(z, x, y) = a_0 + a_1 \left(\frac{2y}{a + 2z \tan \beta} \right) + a_2 \left(\frac{2x}{b + 2z \tan \beta} \right) + a_3 \left(\frac{2y}{a + 2z \tan \beta} \right)^2 + a_4 \left(\frac{2x}{b + 2z \tan \beta} \right)^2 + a_5 \left(\frac{2y}{a + 2z \tan \beta} \right)^3 + a_6 \left(\frac{2x}{b + 2z \tan \beta} \right)^3 + a_7 \frac{4xy}{(a + 2z \tan \beta)(a + 2z \tan \beta)} \tag{6}$$

Les huit coefficients (a₀ à a₇) de ce polynôme sont déduits des conditions suivantes :

1. Δσ(0,0,0) = Δσ₀ ;
2. d[Δσ(z,x,y)]/dy = 0 pour y = 0 ;
3. d[Δσ(z,x,y)]/dx = 0 pour x = 0 ;
4. Δσ(z, 0, a/2+z tanβ) = 0 ;
5. Δσ(z, b/2+z tanβ, 0) = 0 ;
6. Δσ(z, b/2+z tanβ, a/2+z tanβ) = 0 ;
7. d[Δσ(z, b/2+z tanβ, a/2+z tanβ)]/dx = 0 ;
8. d[Δσ(z, b/2+z tanβ, a/2+z tanβ)]/dy = 0.

Comme dans le cas de la semelle rigide circulaire, on déduit la valeur inconnue de l'incrément de contrainte au centre de la plaque Δσ₀ en écrivant l'équilibre de la charge appliquée à la plaque et de la distribution Δσ(0,x,y). On obtient :

$$\Delta\sigma_0 = \frac{4ab\sigma_a}{(a + 2z \tan \beta)(b + 2z \tan \beta)} \tag{7}$$

La distribution des incréments de contrainte verticale à la profondeur z a finalement comme équation :

$$\Delta\sigma(z, x, y) = \frac{4ab\sigma_a}{(a + 2z \tan \beta)(b + 2z \tan \beta)} \left\{ 1 - 3 \left[\left(\frac{2y}{a + 2z \tan \beta} \right)^2 + \left(\frac{2x}{b + 2z \tan \beta} \right)^2 \right] + 2 \left[\left(\frac{2y}{a + 2z \tan \beta} \right)^3 + \left(\frac{2x}{b + 2z \tan \beta} \right)^3 \right] + \frac{4xy}{(a + 2z \tan \beta)(a + 2z \tan \beta)} \right\} \tag{8}$$

La valeur de β doit être déterminée au moyen de la formule (3).

La figure 4 présente les résultats du calcul des incréments de contraintes produits dans le sol par une fondation rectangulaire de côtés a = 2m et b = 4m, posée à la surface du sol et chargée par une pression uniforme σ_a = 180kPa. L'angle de diffusion de la charge β vaut 20 degrés.

La figure 4 montre de part et d'autre de l'axe Oz l'évolution des contraintes selon l'axe Ox [Δσ(z,x,y=0)] et selon l'axe Oy [Δσ(z,x=0,y)], pour deux profondeurs : z = 0m (contact sol-semelle) et z = 1m.

L'analyse de l'équation (6) montre que l'augmentation de la surface de la fondation (a et b) provoque un « ralentissement » de la diffusion de la charge dans le massif de sol, c'est-à-dire

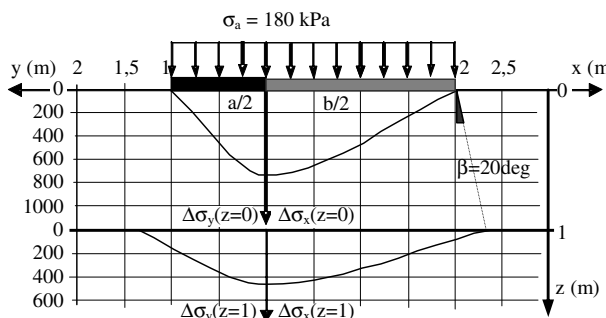


Figure 4. Diffusion des contraintes sous une plaque rigide rectangulaire de côtés a et b, pour un angle β égal à 20 degrés.

que l'augmentation des contraintes verticales concerne un plus grand volume de sol et provoque donc une augmentation de la zone comprimée et du tassement subi par la fondation et le sol.

5 CALCUL DES CONTRAINTES DANS UN SOL MULTICOUCHE SOUS UNE PLAQUE RIGIDE

Lorsque le massif de sol situé sous la semelle rigide n'est pas homogène, mais comprend par exemple des couches de sols différant par leur poids volumique γ, leur indice des vides e ou leur résistance au cisaillement (c et φ), le calcul de la diffusion de la charge dans chaque couche est effectué en utilisant dans les formules (4) pour une plaque circulaire ou (8) pour une plaque rectangulaire les valeurs des paramètres du sol de la couche considérée. Pour simplifier l'exécution des calculs, nous avons choisi de faire référence à une valeur moyenne arithmétique, notée z_{plm}, de la profondeur z_{pl} qui intervient dans le calcul de β.

Si l'on revient au calcul de valeurs moyennes de l'incrément de contrainte verticale à la profondeur z, l'équation (4) devient l'équation (9) :

$$\Delta\sigma(z) = \frac{ab\sigma_a}{\left\{ a + 2z_i \tan \left[\varphi_i \left(\frac{z_i}{z_{plm}} \right) \right] e_i \left(1 - \frac{z_i}{z_{plm}} \right)^{e_i} \right\} \left\{ b + 2z_i \tan \left[\varphi_i \left(\frac{z_i}{z_{plm}} \right) \right] e_i \left(1 - \frac{z_i}{z_{plm}} \right)^{e_i} \right\}} \tag{9}$$

où tous les paramètres de l'équation (4) portent l'indice i pour indiquer qu'ils doivent recevoir les valeurs correspondant à la i-ème couche.

6 CONCLUSION

Dans les calculs par la théorie de l'élasticité des contraintes induites dans un massif de sol par une charge externe, le sol est considéré comme un milieu continu abstrait dépourvu de propriétés physiques. Comme la forme de la distribution des incréments de contraintes dans un demi-espace élastique ne dépend pas de ses propriétés, la capacité de diffusion des charges de ce milieu est constante et diffère sensiblement des données expérimentales.

Dans les sols réels, les dimensions de la zone de diffusion des contraintes dans le plan horizontal sont finies et les contraintes et amplitudes de tassements dépendent du type de sol, de son épaisseur et de son état (teneur en eau et densité).

Le modèle de comportement du sol et les formules de calcul proposés tiennent compte des particularités des sols mentionnées ci-dessus et ils peuvent être utilisés pour tous les types de sols. Ils sont bien adaptés aux sols à structure instable qui peuvent modifier leurs propriétés mécaniques en cas d'humidification et d'actions vibratoires.

Les expressions obtenues décrivent le comportement d'un milieu continu lorsque l'indice des vides est nul et lorsque l'angle de frottement interne est constant.

Lorsque des valeurs connues sont données aux caractéristiques physiques et mécaniques du sol, qui dépendent de son état d'humidité et de densité, les formules de calcul représentent un milieu formé de particules.

Dans le cas des sols mous, qui possèdent une faible capacité de diffusion des contraintes (β et φ proches de zéro), on obtient un comportement proche de celui du modèle des déformations locales de Winkler.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Berezantsev, V.G., Kcenofontov, A.I., Platonov, E.V., Sidorov, N.N., Yaroshenko, V.A. 1961. *Mécanique des sols et fondations* (en russe: Mekhanika gruntov, osnovaniya i fundamenty). Moscou. Éditions du Ministère des Voies de Communications, Transzheldorizdat, 340 pages.
- Holtz, R.D. & Kovacs, W.D. 1991. *Introduction à la géotechnique*. Traduit de l'anglais par J. Lafleur. Éditions de l'École Polytechnique de Montréal, Canada, 400 pages.
- Kurdumov, V.I. 1891. *À propos de la résistance des fondations directes*. Institut Polytechnique, Petrograd, Cours de sols et fondations. 78 pages.
- Prandtl, L. 1920. Über die Härte plastischer Körper. *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft Wissenschaften, Göttingen, Math-Phys.*, vol.I; p.74
- Reissner, H. 1924. Zum Erddruck Problem. *Proceedings, 1st International Congress of Applied Mechanics, Delft*, 295-311.