

INTERNATIONAL SOCIETY FOR SOIL MECHANICS AND GEOTECHNICAL ENGINEERING



This paper was downloaded from the Online Library of the International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering (ISSMGE). The library is available here:

<https://www.issmge.org/publications/online-library>

This is an open-access database that archives thousands of papers published under the Auspices of the ISSMGE and maintained by the Innovation and Development Committee of ISSMGE.

Méthode des éléments finis en dynamique des milieux biphasés de sol

Finite-element method in the dynamics of two-phase soil media

A. L. GOLDIN, Doct.-Ing., VNIIG Védénéev, Lénigrad, URSS

A. G. MICHEL, Ing., VNIIG Védénéev, Lénigrad, URSS

S. G. SHULMAN, Doct.-Ing., VNIIG Védénéev, Lénigrad, URSS

RESUME. Le rapport décrit les méthodes de solution numérique des problèmes de la dynamique des milieux biphasés de sol dans le cadre du modèle de Biot. Un concept unifié a permis d'obtenir des équations variationnelles et d'élaborer un schéma de la méthode des éléments finis. L'analyse des vibrations libres et forcées des sols saturés d'eau s'effectue à l'aide d'un programme de calcul. Un procédé d'élimination des réflexions "fictives" sur le contour conventionnel d'un modèle aux éléments finis est décrit. On examine la procédure et la méthode de solution d'un problème d'identification des paramètres du modèle de Biot.

Le système des équations de la dynamique d'un milieu biphasique de sol comprenant une phase solide poreux isotrope linéairement élastique saturée d'un liquide compressible (modèle de Biot/1/) peut être représenté sous forme:

$$\begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \rho_{12} \frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial \sigma^{kl}}{\partial x^k} - b(v_2 - v_1) &= 0, \\ \rho_{12} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \rho_{22} \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial \alpha p}{\partial x^k} + b(v_2 - v_1) &= 0, \\ \sigma^{kl} = \lambda \varepsilon^{mm} \delta^{kl} + 2\mu \varepsilon^{kl} + Q g \delta^{kl}, \quad \alpha_2 p = Q \varepsilon^{mm} + R g, \\ \varepsilon = \frac{1}{2} (u^{kl} + u^{lk}), \quad g = v^{mm} \end{aligned} \quad (1)$$

où v_1, v_2 sont respectivement les vitesses des phases solide et liquide; ρ_{11}, ρ_{22} - densités effectives des phases; ρ_{12} - masse virtuelle; Q, R, μ, λ, b - paramètres du modèle. On doit ajouter au système (1) les conditions aux limites et initiales correspondantes.

Sous forme matricielle le système (1) est représenté:

$$\begin{aligned} [A]^T \{\dot{\sigma}\} &= [p] \{\ddot{u}\} + [b] \{\dot{u}\}, \quad \varepsilon \in V; \quad \{\dot{\sigma}\} = [D] \{\dot{\varepsilon}\}, \quad \varepsilon \in V; \\ \{\dot{\varepsilon}\} &= [A] \{\dot{u}\}, \quad \varepsilon \in V; \quad [A_s]^T \{\dot{\sigma}_s\} = \{g_s\}, \quad \varepsilon \in S_1; \quad \{u\} = \{u_s\}, \quad \varepsilon \in S_2 \\ t=0, \quad \{u(p,0)\} &= \{d(p)\}, \quad \{\dot{u}(p,0)\} = \{\dot{d}(p)\}, \quad p \in V, S. \end{aligned}$$

Ici $\{u\}, \{\dot{\sigma}\}, \{\dot{\varepsilon}\}, \{g_s\}, \{u_s\}$ sont respectivement

les vecteurs de déplacements, de contraintes, de déformations, de forces superficielles, de déplacements superficielles; $[A], [p], [D], [b], [A_s]$ représentent les

matrices des procédures de différentiation, de la densité, de l'élasticité, de la diffusion et des cosinus directeurs.

La structure des équations (2) permet d'établir à base d'un concept unifié proposé pour la solution des problèmes de la théorie de l'élasticité /4/ une identité principale intégrale d'où on peut déduire les équations variationnelles et les principes de stationnarité des fonctionnelles correspondantes.

En particulier, l'équation variationnelle de Lagrange pour un milieu biphasique de sol a la forme:

$$\int_V ([A] \delta u)^T [D] [A] u \, dv = \int_{S_1} \delta u_s^T \{g_s\} \, ds - \int_V \delta u_s^T ([p] \ddot{u} + [b] \dot{u}) \, dv \quad (3)$$

à condition supplémentaire $\{u\} = \{u_s\}, \quad \varepsilon \in S_2$.

La comparaison entre le système de base (2) et les

équations variationnelles obtenues montre l'absence d'une conformité complète entre eux, car les conditions initiales du problème n'entrent pas dans ces équations.

Si l'on écrit les équations de base sous forme des convolutions (forme de Gurtin), comme dans le cas d'un milieu élastique monophasique, les conditions initiales peuvent être introduites dans les équations du mouvement, donc on aboutit au problème aux limites qui correspond entièrement aux équations variationnelles. C'est la démonstration des propriétés d'extrémum des fonctionnelles obtenues qui joue un rôle important dans l'évaluation de la précision des solutions approchées.

Le schéma de la méthode des éléments finis établi sur la base de l'équation variationnelle de Lagrange (3) pour le cas particulier d'un problème bidimensionnel a la forme:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{p(t)\}. \quad (4)$$

$[K], [M], [C], \{p(t)\}, \{q\}$ étant respectivement les matrices globales de rigidité, de masse, de diffusion, le vecteur de chargement et celui de déplacement nodal.

C'est pour la réalisation numérique du modèle aux éléments finis (4) qu'on a établi un programme de calcul qui permet d'évaluer les fréquences et les modes de vibrations propres d'un massif de sol saturé; d'analyser les vibrations stationnaires (résoudre un système d'équations algébriques); d'étudier les vibrations non-stationnaires par la méthode d'intégration pas à pas (méthode de Runge-Kutt) et par celle de la superposition modale avec le procédé de la transformation rapide de Fourier. Les calculs des vibrations libres et forcées des massifs de sol saturé réalisés selon ce programme ont permis de préciser les critères d'emploi du modèle d'un milieu biphasique. Ils ont montré que pour les sols argileux et les roches perméables à faible coefficient de perméabilité il est rationnel d'utiliser le modèle d'un milieu quasi-monophasique indépendamment de la fréquence des vibrations. En ce qui concerne les sables, gravillons, pierres concassées, enrochements, on doit les considérer comme des milieux biphasiques compte tenu de l'interpénétration des phases. Les calculs des vibrations de fondations sur des sols saturés en régimes stationnaire et non-stationnaire /3/ ont permis de déterminer le caractère de la répartition des contraintes de contact dans le squelette du sol et des pressions dans l'eau interstitielle et d'évaluer les caractéristiques d'amplitude et de fréquence correspondantes.

En particulier, fig. 1a donne la répartition des contraintes de contact par phases sous une dalle de fondation vibrant en régime stationnaire, et fig. 1b représente la courbe de variation en fonction du temps des amplitudes de vibrations non-stationnaires d'une dalle sous l'action d'impulsion.

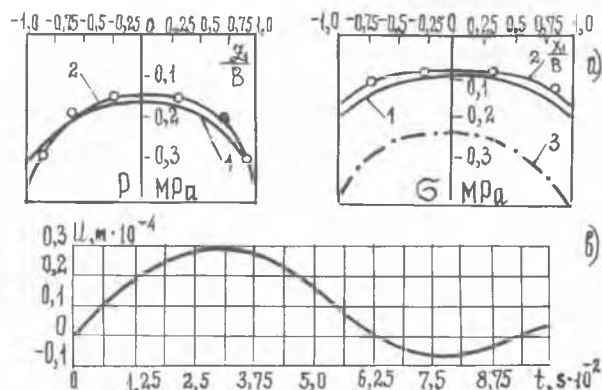


Fig. 1 a) répartition des contraintes de contact par phases; b) courbe de variation des amplitudes des vibrations verticales; 1 - modèle d'un milieu quasi-monophasique; 2 - modèle d'un milieu biphasique; 3 - modèle d'un milieu monophasique linéairement élastique.

Etant donné que lors de la résolution des problèmes dynamiques par la méthode des éléments finis le domaine de calcul est borné, ce qui engendre les ondes réfléchies influençant considérablement l'image réelle de l'état de contraintes du domaine, on devait mettre au point un procédé pour éliminer les réflexions "fictives" sur le contour conventionnel du modèle en éléments finis. Ce procédé est basé sur l'évolution de celui de Lysmer et Kuhlemeyer bien connu en théorie dynamique de l'élasticité [2] qui suppose l'existence des conditions aux limites amortissantes prédéterminées sur le contour conventionnel, à savoir:

$$\sigma_n = a_1 \rho_1 c_p \dot{u}_n, \tau = a_2 c_s \dot{u}_\tau, \sigma = a_3 \rho_2 c_p^2 \dot{u}_n \quad (5)$$

où $c_p > c_s > c_\phi$ sont respectivement les vitesses de propagation des ondes de premier et deuxième genres dans un milieu biphasé; a_1, a_2, a_3 sont des constantes calculées. Ces deux conditions étant réalisées, l'équation en éléments finis du modèle dynamique d'un milieu biphasé à "limite visqueuse normalisée" aura la forme:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{P(t)\}, \quad (6)$$

avec la matrice $[C]$ formée de blocs:

$$[C_2] = \int [N_e]^T [A_{2e}] [\tilde{C}_e] [A_{2e}] [N_e] d\Phi. \quad (7)$$

La solution du problème de la propagation des ondes dans une couche du grès saturé sous l'action de l'impulsion triangulaire sert d'exemple de la réalisation numérique du procédé élaboré pour éliminer les réflexions "fictives". Elle a démontré (fig. 2) une haute efficacité de l'absorption d'énergie par la "limite visqueuse normalisée".

Les difficultés dues aux calculs selon le modèle de Biot peuvent être surmontées grâce aux méthodes numériques, en particulier à la méthode des éléments finis, les paramètres du modèle pouvant être déterminés sur la base de la résolution des problèmes d'identification.

Les méthodes de solution des problèmes inverses, utilisées dans le travail, sont basées sur la combinaison des méthodes des éléments finis et des fonctions de sensibilité. Dans le cas général elles se réduisent au problème de commande optimale: minimiser la fonctionnelle

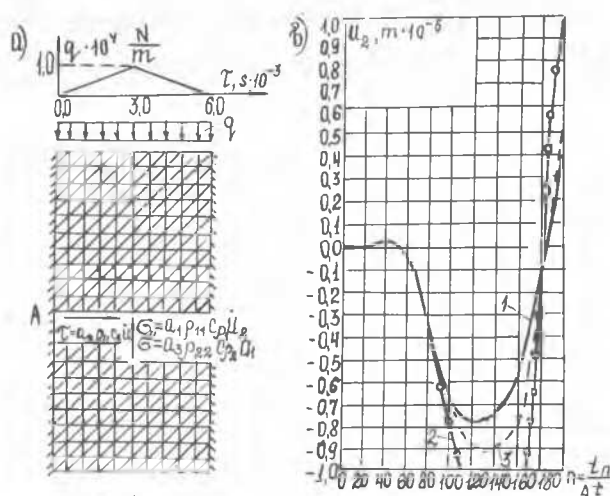


Fig. 2 a) schéma de calcul; b) courbes de variation de la composante verticale de déplacements de la phase solide du nœud dans la section AA en fonction du temps; 1 - couche infinie; 2 - limite libre; 3 - limite "visqueuse".

de forme:

$$J(\lambda) = \sum [y(t_j, \lambda_j) - \{z(t_j, \lambda_j)\}^T [G] [y(t_j, \lambda_j) - \{z(t_j, \lambda_j)\}]. \quad (8)$$

avec λ_j - paramètres à déterminer, $\{y(t_j, \lambda_j)\}, \{z(t_j, \lambda_j)\}$ -

valeurs à calculer et à mesurer (par exemple, déplacements, déformations, pressions), $[G]$ - matrice des facteurs de pondération. L'analyse des problèmes "tests" (fig. 3a) et l'examen de la convergence de l'algorithme itératif en fonction d'approximation initiale (fig. 3b) et

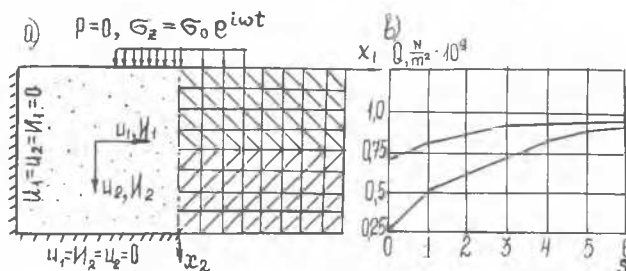


Fig. 3 a) schéma de calcul; b) marche du processus itératif.

des "erreurs" de mesure ont mis en évidence une précision acceptable d'évaluation des paramètres inconnus.

Les méthodes et les programmes de calcul élaborés permettent de résoudre un grand nombre de problèmes directs et inverses de la dynamique des milieux de sol saturés d'eau.

REFERENCES

- (1) BIOT, M.A. Theory of production of elastic waves in fluid-saturated porous solid. Journal Acoust. Soc. America, vol. 28, No. 2, p. 168-178.
- (2) LYSMER, J., KUHEMEYER, R.L. Finite dynamic model for infinite media. Proc. ASCE, Journal Eng. Mech. Div., vol. 95, No. 4, 1969, p. 859-877.
- (3) MICHEL, A.G., SHULMAN, S.G. Vibrations d'une plaque sur une fondation biphasique. Izvestia VNIIG B.E. Védénév, vol. 166, 1983, p. 39-41.
- (4) ROSINE, L.A. Formulations variationnelles des problèmes relatifs aux systèmes élastiques. Ed. LGU A.A. Zhdanov, Leningrad, 1978, 222 p.