

INTERNATIONAL SOCIETY FOR SOIL MECHANICS AND GEOTECHNICAL ENGINEERING



This paper was downloaded from the Online Library of the International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering (ISSMGE). The library is available here:

<https://www.issmge.org/publications/online-library>

This is an open-access database that archives thousands of papers published under the Auspices of the ISSMGE and maintained by the Innovation and Development Committee of ISSMGE.

Convection thermique naturelle et forcée en sol saturé

Natural and forced thermal convection in a saturated soil

E. RECORDON, Laboratoire de mécanique des sols, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse
D. BOVET, Laboratoire de mécanique des sols, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse

SYNOPSIS

Un massif de sable de 5 m de diamètre et 3,8 m de hauteur a en son centre un puits crépiné de 80 cm de diamètre, et à sa périphérie une grille thermique froide suivie d'un manteau drainant. De l'eau chaude est injectée dans le puits central et ressort par le manteau drainant, refroidie par la grille. Les isothermes devraient être des cylindres verticaux sans la convection naturelle qui se superpose à la convection forcée du fait de la non-horizontalité des isothermes : celles-ci se trouvent alors évasées vers le haut. On rapporte une observation expérimentale du champ thermique, et sa modélisation par la méthode du complexe topologique; le champ des vitesses est calculé, selon le théorème de Clebsch, comme la superposition d'un champ dérivant d'un potentiel scalaire, et d'un champ dérivant d'un potentiel-vecteur.

Dans la fosse profonde de l'ISRF, puits bétonné de 5 m de diamètre et 8 m de hauteur, a été constitué à partir de 1980 un modèle pour l'étude des flux hydrauliques et thermiques couplés dans un massif de sol. Le modèle complet, achevé en 1982, est constitué d'une couche inférieure de 3,8 m de hauteur, relativement perméable ($K_D = 100 \cdot 10^{-9} \text{ [m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}]$) dite "zone saturée", et d'une couche supérieure de 3,10 m de hauteur, moins perméable ($K_D = 10^{-9} \text{ [m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}]$) dite "zone non saturée"; les deux couches sont traversées verticalement par un puits central de 80 cm de diamètre, crépiné sur la hauteur de la zone saturée; celle-ci est entourée d'une "grille thermique" formée de tuyaux verticaux dans lesquels circule de l'eau froide, et d'un manteau drainant déversant l'eau injectée par le puits et ayant traversé radialement le massif, dans un trou d'écoulement situé au point bas de la fosse (fig. 1).

La présente communication rend compte d'observations faites en 1981 sur la partie inférieure, soit la zone saturée. Un flux d'eau chaude à 50°C était injecté par le puits central et, traversant le massif, se refroidissait en se rapprochant de la grille thermique; une pompe à chaleur assurait le chauffage de l'eau injectée en même temps que le refroidissement de l'eau circulant dans la grille. L'expérience serait fort banale si la convection forcée ainsi établie n'était pas perturbée par une convection naturelle due au fait que les isothermes étant en première approximation des cylindres verticaux, le gradient de densité de l'eau n'est pas parallèle à la pesanteur. On voit alors les isothermes s'évaser vers le haut : la température sert de traceur au mouvement de l'eau, et indique par la forme des isothermes une ascension d'eau chaude au voisinage du puits, et une descente d'eau froide au voisinage de la grille thermique.

La figure 2 représente les isothermes observées, le régime permanent étant établi, lors d'une injection d'eau chaude à 50°C dans le puits central, la grille thermique imposant une température de sortie d'environ 15°C. Le débit injecté Q était de $0,25 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^3 \cdot \text{s}^{-1}]$; la hauteur du massif étant $h = 3,8 \text{ [m]}$, la vitesse de Darcy en fonction du rayon r est en première approximation

$$v = \frac{Q}{2\pi rh}, \quad (1)$$

soit $v = 26 \cdot 10^{-6} \text{ [m} \cdot \text{s}^{-1}]$ au voisinage du puits central ($r = 0,4 \text{ m}$) et $v = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ [m} \cdot \text{s}^{-1}]$ au voisinage de la grille ($r = 2,3 \text{ m}$); ces valeurs supposent l'homogénéité du massif et l'absence de convection naturelle, hypothèses que nous allons précisément examiner pour les rejeter l'une et l'autre.

Supposant tout d'abord qu'il n'y ait pas de convection forcée, occupons-nous seulement de la convection naturelle. L'eau étant dilatable, sa densité ρ est fonction de la température T , et l'on a

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)), \quad (2)$$

où T_0 est la température de référence, ρ_0 la densité de référence (valeur de ρ pour $T = T_0$) et α le coefficient de dilatation. Soit $|g| = 9,81 \text{ [m} \cdot \text{s}^{-2}]$ la valeur absolue de l'accélération de la pesanteur, nous désignerons par g le vecteur vertical de bas en haut d'intensité $|g|$. Si, la convection forcée étant exclue par hypothèse, nous voulions aussi annuler la convection naturelle, l'équation de l'hydrostatique

$$\text{grad } p = -\rho g \quad (3)$$

exigerait que

$$\text{rot}(\rho g) = \text{grad } \rho \times g + \rho \text{ rot } g = 0, \quad (4)$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (2) et de $\text{rot } g = 0$:

$$\text{grad } \rho \times g - \alpha \rho_0 \text{ grad } T \times g = 0. \quad (5)$$

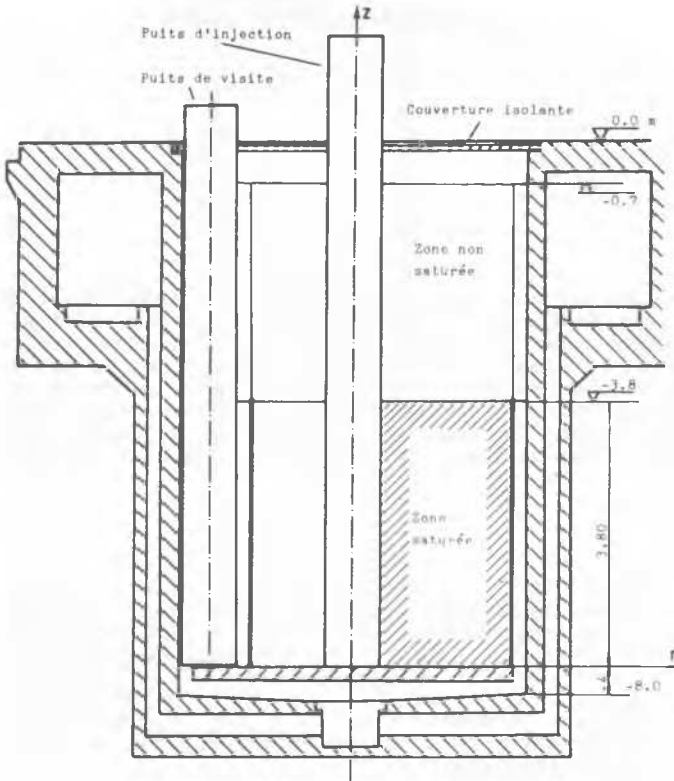


Fig. 1 Fosse profonde de l'ISRF
Coupe verticale

Il faudrait donc que le gradient thermique fût parallèle à g , autrement dit que la température fût répartie en couches horizontales isothermes. Or tel n'est pas nécessairement le cas : lorsqu'une source de chaleur quelconque située dans un massif provoque un gradient thermique, celui-ci n'est en général pas uniformément vertical. Alors les conditions de l'hydrostatique ne sont pas vérifiées, et des forces naissent, imprimant à l'eau un mouvement tendant à rendre les isothermes horizontales. Mais si les sources de chaleur sont maintenues, ce n'est pas l'équilibre qui s'établit, mais un écoulement stationnaire rotationnel, qui est la cause de la convection naturelle de la chaleur.

Revenant au cas général, nous poserons

$$i = -(\text{grad } p + \rho g), \quad (6)$$

et nommerons le vecteur i la **pente hydraulique**; i n'est en général pas un gradient, et il n'est pas possible d'écrire comme on le fait d'ordinaire $i = -\text{grad } \phi$, avec $\phi = p + \rho |g|z$, car on a

$$\omega = \text{rot } i = -\alpha \rho_0 g \times \text{grad } T. \quad (7)$$

D'après la loi de Darcy, la vitesse de Darcy v est liée à la pente hydraulique par l'équation

$$v = K_D i, \quad (8)$$

où K_D est le **coefficient de Darcy**. La conservation de l'eau exige dans tout l'intérieur du massif $\text{div } v = 0$; mais sur sa frontière le flux entrant ou sortant peut être considéré comme une densité de sources singulière, et nous écrirons

$$\text{div } v = \zeta, \quad (9)$$

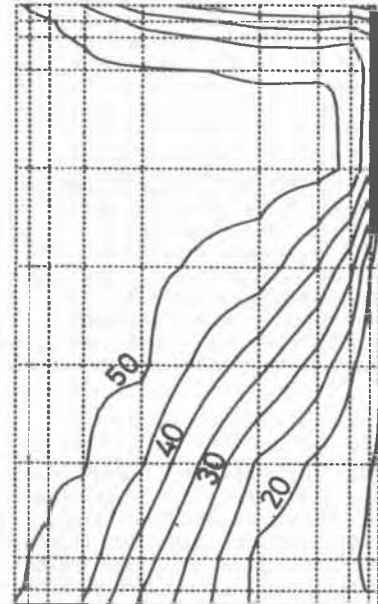


Fig. 2 Isothermes observées dans un plan méridien (Agrandissement de la partie hachurée de la fig. 1)

étant entendu que ζ est une **distribution** (Schwartz, 1957) nulle à l'intérieur du massif (mais non sur sa frontière).

Cela posé, voici ce qu'affirme le **théorème de Clebsch** (Vogel, 1956) : tout champ vectoriel dans l'espace à trois dimensions peut être représenté comme la somme d'un gradient et d'un rotationnel : la fonction dont on prend le gradient est le **potentiel scalaire**, le vecteur dont on prend le rotationnel est le **potentiel-vecteur**. Dans notre cas, l'écoulement de l'eau dans un massif poreux est décrit par deux champs vectoriels, i et v : mais ils sont liés par l'équation (8), si bien qu'ils ne forment qu'un champ vectoriel indépendant, que nous désignerons par la paire (i, v) , pour ne pas privilégier l'un par rapport à l'autre. Nous décomposerons alors le champ total en deux champs partiels :

$$(i, v) = (i', v') + (i'', v''). \quad (9)$$

Nous ferons dériver le champ (i', v') d'un potentiel scalaire ϕ en posant

$$i' = -\text{grad } \phi, \quad (10)$$

et en lui imposant la condition

$$\text{div } v' = \zeta; \quad (11)$$

en combinant les équations (10) et (11), nous obtenons l'**équation de Poisson** :

$$\operatorname{div} (K_D \operatorname{grad} \phi) = -\zeta. \quad (12)$$

Nous ferons dériver le champ (i'' , v'') d'un potentiel-vecteur ϕ en posant

$$v'' = \operatorname{rot} \phi \quad (13)$$

et en imposant la condition

$$\operatorname{rot} i'' = \omega; \quad (14)$$

en combinant les équations (13) et (14), nous obtenons l'équation de Poisson "vectorielle"

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{K_D} \operatorname{rot} \phi \right) = \omega. \quad (15)$$

Comme on a évidemment

$$\operatorname{rot} i' = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{div} v'' = 0, \quad (16)$$

en additionnant (i' , v') et (i'' , v'') on obtient un champ total (i , v) satisfaisant les deux conditions

$$\operatorname{div} v = \zeta, \quad \operatorname{rot} i = \omega. \quad (17)$$

La partie (i' , v') du champ des vitesses correspond à la convection **forcée** parce que sa cause (ζ) est imposée à la surface du massif; la partie (i'' , v'') correspond à la convection dite **naturelle** parce que sa cause (ω) prend naissance spontanément à l'intérieur du massif. Cette décomposition est globale : localement, rien ne distingue les deux modes de convection.

Les équations (12) et (15) ne sont que la formulation du **problème hydraulique**; le **problème thermique** est résumé dans l'équation de la propagation convective de la chaleur

$$\operatorname{div}(K_F \operatorname{grad} T) - \operatorname{div}(\gamma C v(T-T_0)) - C \dot{T} = -\Gamma, \quad (18)$$

où K_F est le **coefficient de Fourier**, C la **capacité thermique volumique**, γ le **coefficient de partage** exprimant que la chaleur se répartit dans une certaine proportion entre l'eau interstitielle et le squelette, enfin Γ est la **densité de sources de chaleur**; la fonction inconnue est la température T . On voit que v , solution du problème hydraulique, figure parmi les coefficients du problème thermique; mais en retour T , solution du problème thermique, détermine par l'équation (7) l'un des seconds membres du problème hydraulique. Il y a donc couplage entre les deux problèmes, qui n'en forment qu'un, le **problème thermo-hydraulique**. Les équations (12), (15) et (18) considérées chacune pour soi, sont linéaires; mais leur connexion en fait un **système non-linéaire**.

Les données du problème thermo-hydraulique sont des conditions de Dirichlet ou de Neumann (éventuellement des conditions mixtes) relatives à la partie "forcée" du champ des vitesses, et au champ des températures : on impose donc aux divers points de la surface du massif soit des flux (d'eau et de chaleur) soit des potentiels hydrauliques et des températures. La résolution en tenant compte de la convection naturelle se fait par itération : on commence par résoudre le problème hydraulique en faisant $\omega = 0$; on porte la valeur trouvée de v dans l'équation (18); en résolvant on trouve une valeur de T qui détermine une valeur généralement non-nulle de ω par l'équation (7); on reprend alors le problème hydraulique et l'on continue... jusqu'à ce que deux solutions consécutives

soient assez proches pour qu'on juge que la méthode a convergé.

Ce calcul a été fait pour analyser le champ de température représenté par la figure 2. On a tenu compte de la symétrie cylindrique pour ramener le problème dans un plan méridien; les équations aux dérivées partielles ont été discrétisées par la méthode du **complexe topologique** (Bovet, 1977), qui a l'avantage de permettre facilement la combinaison d'un potentiel scalaire et d'un potentiel-vecteur; la méthode de résolution était une méthode de relaxation, dite de **Gauss-Seidel**. Les conditions aux limites imposées sont résumées dans le tableau suivant :

Part. de surface	Puits central	Grille thermique	éponge inf.	éponge sup.
Problème				
Hydraulique	D : $\phi = \phi_1$	D : $\phi = \phi_0$	N : $\zeta = 0$	N : $\zeta = 0$
Thermique	D : $T = 50^\circ\text{C}$	D : $T = 15^\circ\text{C}$	N : $\Gamma = 0$	D : T obs.

Par D ou N nous indiquons respectivement une condition de Dirichlet ou de Neumann; ϕ_1 et ϕ_0 étaient déterminés par tâtonnement afin d'obtenir le débit $Q = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^3 \cdot \text{s}^{-1}]$. Sur l'éponge supérieure, en contact avec l'atmosphère, les pertes thermiques sont importantes, d'où la forte stratification horizontale des isothermes : renonçant à en analyser le mécanisme, nous avons tout simplement imposé la température observée comme une condition de Dirichlet.

La viscosité de l'eau aussi bien que le coefficient de dilatation dépendent de la température; cependant, pour α , nous nous sommes contentés d'une valeur constante moyenne $\alpha = 0,32 \cdot 10^{-3} \text{ [K}^{-1}]$. Pour la viscosité η , qui diminue à peu près de moitié entre 15°C et 50°C , nous avons tenu compte de cette variation en admettant que K_D lui est inversement proportionnel, et en prenant

$$K_D(T) = K_D(T_0) \frac{\eta(T_0)}{\eta(T)}, \quad (19)$$

adoptant pour $\eta(T)$ la formule donnée par les tables CRC (CRC, 1977-78), p. F51. Cette variation de K_D est en fait une non-linéarité supplémentaire mais qui, si l'on peut dire, "ne coûte presque rien" étant donné le grand nombre d'itérations exigées de toutes façons par la méthode de résolution.

Adoptant pour K_D la valeur de référence uniforme $K_D(15^\circ\text{C}) = 100 \cdot 10^{-9} \text{ [m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}]$, le calcul tenant compte de la convection naturelle nous a donné la répartition de température représentée par les isothermes de la figure 3. On voit que la répartition observée (fig. 2) n'est reproduite que qualitativement.

On s'est alors demandé si une stratification de la perméabilité, faisant de $K_D(T_0)$ une fonction de la cote z , ne contribuait pas aussi à expliquer la répartition observée. La justification de cette hypothèse est d'abord le bon sens : les couches supérieures comprimant les couches inférieures, il est normal que $K_D(T_0)$ diminue avec la profondeur; cette stratifica-

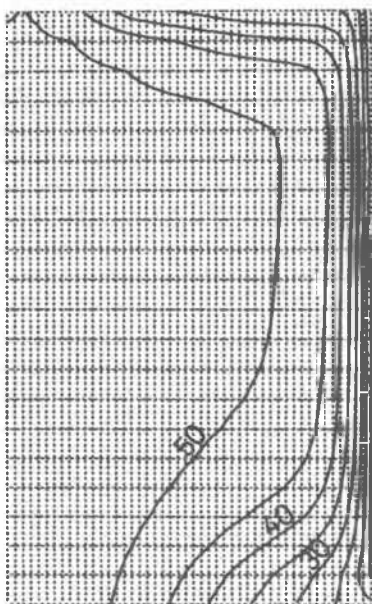


Fig. 3 Isothermes calculées
 $\alpha = 0,32 \cdot 10^{-3}$,
 $K_D = 100 \cdot 10^{-9}$

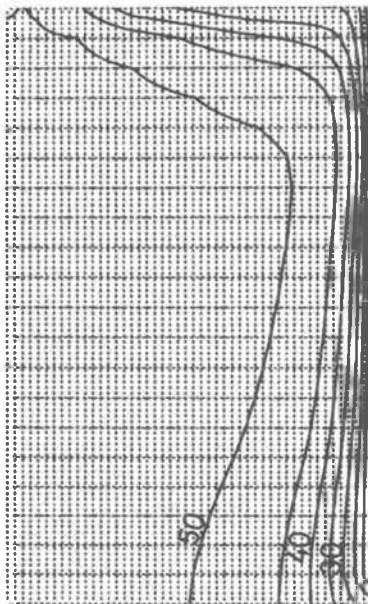


Fig. 4 Isothermes calculées
 $\alpha = 0$,
 $K_D = (40 \dots 160) \cdot 10^{-9}$

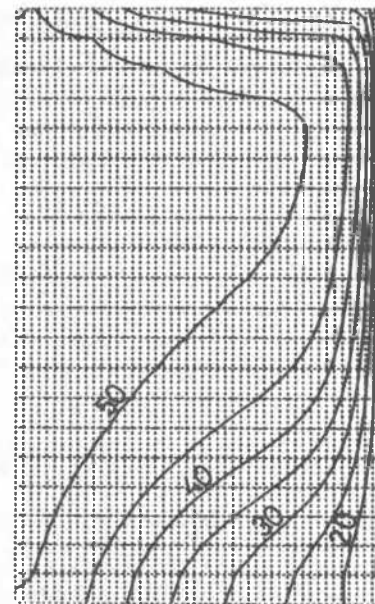


Fig. 5 Isothermes calculées
 $\alpha = 0,32 \cdot 10^{-3}$,
 $K_D = (40 \dots 160) \cdot 10^{-9}$

tion a d'autre part été confirmée par des mesures hydrauliques faites pendant le remplissage progressif du massif : on a constaté une augmentation de la perméabilité à 15°C dans le rapport de 1 à 4 environ entre le fond et la surface. On a alors supposé une variation linéaire de 40 à $160 \cdot 10^{-9}$ [$m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s$] entre le fond et la surface; et pour isoler l'effet de cette stratification de celui de la convection naturelle, on a fait un premier calcul en posant $\alpha = 0$. La figure 4 montre le résultat. Combinant alors les deux effets, en rétablissant $\alpha = 0,32 \cdot 10^{-3}$ [K^{-1}], on a obtenu la figure 5 : la reproduction de la figure expérimentale est bien meilleure.

Le problème que nous venons de traiter est un exemple de "problème inverse", consistant à remonter d'une observation de champ à la détermination des coefficients matériels d'un système : il s'agit de ce que les mathématiciens appellent un problème "mal posé" (Tikhonov et Arsénine, 1976), parce que le nombre des inconnues y excède le nombre des données. Il faut alors suppléer au défaut d'information par des hypothèses plus ou moins arbitraires : la sagacité de l'analyste les choisira les plus "économiques" possibles, c'est-à-dire les plus simples compatibles avec l'information disponible. Dans notre cas, d'autres modulations de K_D (T_0) nous permettraient d'affiner la correspondance entre l'expérience et sa reproduction mathématique : nous n'avons voulu montrer que deux étapes dans cette recherche; d'autres peuvent être aisément imaginées. Il y a une conclusion pratique générale à tirer de notre expérience et de notre calcul : c'est que lorsque la pro-

pagation de la chaleur est convective, des inhomogénéités de K_D ordinairement négligées peuvent modifier considérablement la répartition des températures; d'autre part, la convection naturelle modifie elle aussi la répartition des températures; et les effets de chacune de ces deux causes peuvent être du même ordre de grandeur.

Les auteurs tiennent à remercier ici MM. Bernard Corminboeuf, ingénieur-mécanicien, Andréas Nickel, licencié ès sciences naturelles, et Silvano Mariani, physicien diplômé, à qui sont dues la construction et l'exploitation du modèle expérimental, ainsi que la programmation du modèle d'analyse numérique.

REFERENCES

- CRC Handbook of Chemistry and Physics, 58th edition Cleveland, CRC press, 1977-1978.
- Bovet D. "La discrétisation des problèmes de la physique mathématique au moyen de complexes topologiques", Z. angew. Math. Phys. 28, pp. 371-374, 1977.
- Schwartz L. Théorie des distributions, T I et II, Paris, Hermann, 1957.
- Tikhonov A., Arsénine V. Méthodes de résolution de problèmes mal posés, Moscou, MIR, 1976.
- Vogel Th. Physique mathématique classique, Paris, A. Colin, 1956.