

INTERNATIONAL SOCIETY FOR SOIL MECHANICS AND GEOTECHNICAL ENGINEERING



This paper was downloaded from the Online Library of the International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering (ISSMGE). The library is available here:

<https://www.issmge.org/publications/online-library>

This is an open-access database that archives thousands of papers published under the Auspices of the ISSMGE and maintained by the Innovation and Development Committee of ISSMGE.

Analyse Limite et Stabilité des Fouilles

Limit Analysis and Stability of Excavations

J. PASTOR Maître Assistant, Laboratoire de Mécanique des Sols, IMG, Grenoble, France

RESUME Le problème de la stabilité des ouvrages de Génie Civil est un cas typique où l'Analyse Limite peut apporter des solutions mécaniquement cohérentes grâce, en particulier, à l'amélioration permanente des ordinateurs et de leur logiciel. Dans cette communication nous en présentons l'application analytique et numérique au cas de la stabilité des talus chargés en déformation plane pour les matériaux de Tresca (ou Mises) et de Coulomb. Le problème de la fouille circulaire nous permettra ensuite de comparer les comportements des matériaux de Mises et de Tresca. Parallèlement nous décrivons la mise en oeuvre numérique de la méthode statique (Lower Bound Method) en déformations plane et en symétrie de révolution pour les matériaux de Mises, Tresca et Coulomb. Nous donnons également le principe de son extension, en cours, au cas tridimensionnel.

INTRODUCTION

La théorie de l'Analyse Limite (A.L.) (HILL, DRUCKER-PRAGER) conduit à deux méthodes d'approche des charges limites, l'une dite méthode statique, l'autre appelée méthode cinématique. L'avènement d'ordinateurs puissants et surtout dotés de logiciels performants (type MPSX/370 chez IBM) a donné un regain d'intérêt à cette théorie en élargissant la classe des problèmes qu'elle pouvait traiter, grâce en particulier à la méthode des éléments finis. Les calculs analytiques deviennent en effet difficiles pour des cas de géométrie ou de symétrie non simples, tel par exemple le problème de la stabilité des talus.

LE TALUS UNIFORMEMENT CHARGE

Le matériau du talus, de poids volumique γ , dont la géométrie est définie fig.2, est homogène, isotrope et obéit au critère de Tresca-Coulomb :

$$F(\sigma) = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} - (2c \cos \phi + (\sigma_x + \sigma_y) \sin \phi) \leq 0$$

Appelons chargement le vecteur $\{\frac{\sigma_H}{c}, \frac{p_c}{c}\}$ représenté dans le repère de la fig.1a. L'ensemble des chargements licites, i.e. équilibrés par un champ de contraintes statiquement et plastiquement admissible dans tout le massif, est un convexe appelé K (cf SALENCON, 1973). La frontière $\mathcal{F}(K)$ de K est le lieu des chargements limites $\{\frac{\sigma_H}{c}, \frac{p_c}{c}\}_{lim}$ entraînant la ruine du talus.

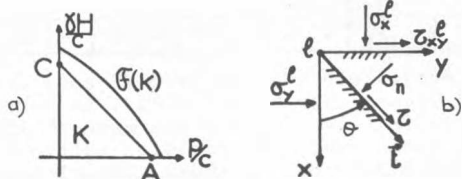


Fig.1-a) le convexe K b) définition de σ_n et τ_n

Afin de déterminer $\mathcal{F}(K)$ il est avantageux ici de décomposer le problème en considérant le cas non pesant chargé (point A, fig.1a) puis celui du cas pesant non chargé (point C). Cette analyse permet d'obtenir en deux étapes le segment AC qui, K étant convexe, donne un ensemble de solutions statiques pour δ et p variables.

Etude du cas non-pesant (Tresca)

Approche statique : Elle est basée sur la théorie de l'équilibre limite et sur le schéma résolutif de la fig.2

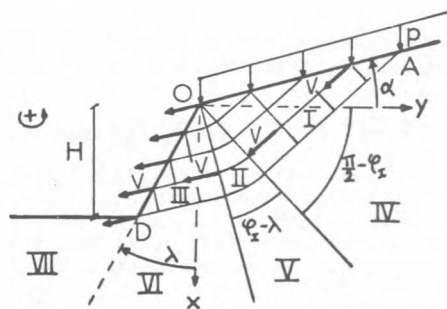


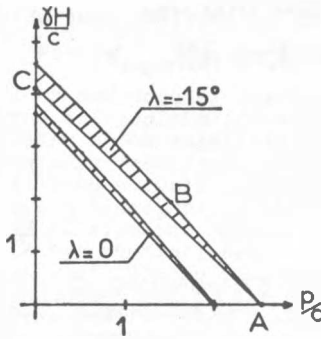
Fig.2 - Le réseau de caractéristiques

Ce schéma permet, après un calcul classique, d'obtenir $(p/c)_{stat}$ donné par :

$$\left(\frac{p}{c}\right) \cos \alpha - \cos \beta - \beta + 2\lambda - 2\alpha - 1 = 0 \quad (1)$$

avec $\varphi = (\sigma_1, \sigma_3)$, σ_1 contrainte principale majeure, $\varphi_1 = \alpha + \beta/2$ et $\beta = \text{Arcsin}(-\frac{p_c}{c} \sin \alpha)$. La résolution de (1) se fait numériquement si $\alpha > 0$; pour $\alpha = 0$, il vient $(p/c)_{stat} = 2 - 2\lambda$. Le champ est prolongé identiquement à lui-même dans les zones IV, V et VI, avec le champ nul en zone VII.

Approche cinématique : Elle utilise le champ de

Fig.4 - Résultats pour $\lambda=0$ et $\lambda=-15^\circ$

Matériau de Coulomb. Le tableau 2 donne, à titre d'exemple, les résultats obtenus pour $\alpha = \lambda = p = 0$. Les valeurs statiques sont fournies par le programme décrit plus haut, l'étude cinématique a été faite à l'aide de spirales de pied dont le centre est donnée par ses coordonnées $-X_0, H$ et $-Y_0, H$ dans les axes de la fig.2.

TABLEAU 2

ϕ	0	5	10	15	20	25
X_0	1,21	2,24	2,0	1,88	5,43	3,0
Y_0	1,41	2,25	1,94	1,62	3,91	2,0
$\frac{\delta H}{c}$ ciné.	3,831	4,165	4,548	4,971	5,349	5,99
$\frac{\delta H}{c}$ stat.	3,518	3,885	4,264	4,628	4,979	5,335

Les résultats statiques, obtenus avec un maillage de 76 triangles seulement, sont proches des valeurs cinématiques, lesquelles retrouvent voire améliorent celles de CHEN (1975). Ceci permet de conclure sur l'efficacité des mécanismes de blocs, observation confirmée par la difficulté d'approcher, pour ce problème précis, leurs résultats à l'aide de méthodes cinématiques éléments finis pour un coût de calcul raisonnable. Notons enfin que ces valeurs cinématiques sont des bornes supérieures des $\frac{\delta H}{c}_{\text{ciné}}$ pour le matériau de Coulomb non standard.

LA FOUILLE CIRCULAIRE

Pour étudier ce cas de symétrie cylindrique nous avons mis au point deux programmes statiques éléments finis, l'un concernant le critère de Mises (PASTOR - TURGEMAN, 1979), l'autre celui de Tresca-Coulomb. Nous décrivons d'abord les points communs aux deux programmes, puis la linéarisation propre à chaque critère, enfin nous comparons les résultats obtenus pour Mises et Tresca sur le maillage de la fig.5.

Les caractéristiques communes concernent la description du champ de contraintes et les conditions qui le rendent statiquement admissibles. Le milieu repéré dans le système d'axes $R\theta Z$ (fig.5) est divisé en triangles sur chacun desquels les seules composantes non nulles de sont données par :

$$\begin{aligned}\sigma_R &= A + B \cdot Z + C \cdot R \\ \sigma_\theta &= A + B \cdot Z + 2 \cdot C \cdot R & \tau_{RZ} &= 0.5(\delta - E) \cdot R \\ \sigma_Z &= D + E \cdot Z + F \cdot R\end{aligned} \quad (6)$$

Les $A, B, \dots, F$ devenant les inconnues du problème.

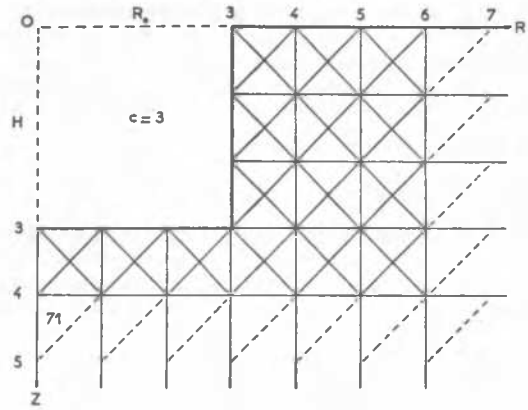


Fig.5-Fouille circulaire:maillage à 71 triangles

Les équations de l'équilibre indéfini sont ainsi vérifiées implicitement. Les conditions de continuité de σ_n et τ sont imposées, de manière analogue à la précédente, à chaque côté interne de triangle; les conditions aux limites et les interfaces éventuels donnent également d'après (6) des conditions linéaires en les inconnues choisies. La fonctionnelle n'est autre que δ poids volumique du sol pris comme inconnue à maximiser.

Le critère de Mises s'écrit :

$$\left(\frac{\sigma_R + \sigma_\theta}{2} - \sigma_\theta\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_R - \sigma_\theta)\right)^2 + (\sqrt{3} \tau_{RZ})^2 \leq 3c^2 \quad (7)$$

soit sous forme équivalente :

$$\lambda_1 = \left(\frac{\sigma_R + \sigma_\theta}{2} - \sigma_\theta\right)^2, \lambda_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_R - \sigma_\theta)\right)^2, \lambda_3 = (\sqrt{3} \tau_{RZ})^2 \quad (8)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 3c^2$$

chacune des courbes $\lambda_i = f_i(\sigma)$, du type $y = x^2$ dans des axes appropriés, est remplacée par une ligne polygonale décrite à l'aide de variables séparables p_i^j telles que (8) est remplacé par:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_R + \sigma_\theta}{2} - \sigma_\theta &= \sum_i p_i^1 \Delta_i^1 - \sqrt{3} c \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_R - \sigma_\theta) &= \sum_i p_i^2 \Delta_i^2 - \sqrt{3} c \\ \sqrt{3} \tau_{RZ} &= \sum_i p_i^3 \Delta_i^3 - \sqrt{3} c\end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} p_i^j : \text{variable} \\ \text{séparable} \\ i, j \rightarrow n \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^n p_i^j \Delta_i^j + 3c^2 \right) \leq 3c^2 \quad (10)$$

avec $\Delta_i^1 = 2\sqrt{3}c/n$ et $\Delta_i^2 = (i \Delta_i^1 - \sqrt{3}c) - (i-1) \Delta_i^1 - \sqrt{3}c^2$

Le résultat, pour Mises, est donc un problème de programmation séparable, extension non linéaire de la programmation linéaire.

Cette formulation se généralise au cas tridimensionnel en faisant $R \rightarrow x$, $\theta \rightarrow y$, $Z \rightarrow z$ et en ajoutant à (9) les relations analogues définissant $\sqrt{3} \tau_{xy}$ et $\sqrt{3} \tau_{yz}$, (10) devenant) :

$$\sum_{j=1}^6 \left(\sum_{i=1}^n p_i^j \Delta_i^j + 3c^2 \right) \leq 3c^2 \quad (11)$$

Le programme résultant, après un changement de variables adéquat, a été appliqué avec succès au problème de l'écrasement d'une plaque carrée, autorisant ainsi une comparaison intéressante avec le problème de la plaque circulaire (cf BOTTERO, PASTOR, TURGEMAN, 1980).

Le critère de Tresca-Coulomb est donné par :

$$|\sigma_i - \sigma_j| \leq (\sigma_i + \sigma_j) \sin \phi + 2c \cos \phi \quad (12)$$

avec $i \neq j$, i et j : 1, 2 et 3, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ contraintes principales. Tenant compte de la structure particulière du tenseur contrainte dans ce cas de symétrie, (12) devient avec $\Delta = \sqrt{(\sigma_R - \sigma_Z)^2 + 4\tau_{RZ}^2}$

$$\Delta \leq (\sigma_R + \sigma_Z) \sin \phi + 2c \cos \phi$$

$$\Delta \leq \frac{4c \cos \phi}{1 + \sin \phi} + (\sigma_R + \sigma_Z) - 2\sigma_\theta \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \quad (13)$$

$$\Delta \leq \frac{4c \cos \phi}{1 - \sin \phi} - (\sigma_R + \sigma_Z) + 2\sigma_\theta \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}$$

Soit trois cônes dans les espaces appropriés. Chacun de ces cônes est linéarisé par l'intérieur de sorte que (13) est remplacé par :

$$\sigma_R \left(\cos \frac{2\pi r}{m} - \sin \phi \cos \frac{\pi}{m} \right) - \sigma_Z \left(\cos \frac{2\pi r}{m} + \sin \phi \cos \frac{\pi}{m} \right) + 2\tau_{RZ} \sin \frac{2\pi r}{m} \leq 2c \cos \phi \cos \frac{\pi}{m}$$

$$\sigma_R \left(\cos \frac{2\pi r}{m} - \cos \frac{\pi}{m} \right) - \sigma_Z \left(\cos \frac{2\pi r}{m} + \cos \frac{\pi}{m} \right) + 2\sigma_\theta \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \cos \frac{\pi}{m} + 2\tau_{RZ} \sin \frac{2\pi r}{m} \leq \frac{4c \cos \phi}{1 + \sin \phi} \cos \frac{\pi}{m} \quad (14)$$

$$\sigma_R \left(\cos \frac{2\pi r}{m} + \cos \frac{\pi}{m} \right) - \sigma_Z \left(\cos \frac{2\pi r}{m} - \cos \frac{\pi}{m} \right) - 2\sigma_\theta \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \cos \frac{\pi}{m} + 2\tau_{RZ} \sin \frac{2\pi r}{m} \leq \frac{4c \cos \phi}{1 - \sin \phi} \cos \frac{\pi}{m}$$

De même que précédemment, le problème final est un problème de P.L., dualisé avant résolution.

Les conditions de prolongement, identiques pour Mises et Tresca à celles décrites par PASTOR-TURGEMAN (1979), généralisent celles décrites par PASTOR (1978) à trois cônes au lieu d'un seul dans le cas de Coulomb.

Comparaison Mises-Tresca (Fig.5). Dans le cas $R=H$ nous disposons des résultats suivants (REYNAUD, 1979 ; PASTOR-TURGEMAN, 1979) :

Mises: $2 \leq \frac{\delta H}{c} \leq 4,998$ Tresca: $2 \leq \frac{\delta H}{c} \leq 5,298$

L'essai des programmes statiques sur ce maillage a fourni, pour une cohésion $c = 3.0$:

Mises : $\frac{\delta H}{c} \geq 3,068$ en 770 s.CPU sur IBM 370/168

Tresca: $\frac{\delta H}{c} \geq 3,113$ en 155 s.CPU avec MPSX/370

Le calcul, à partir de chacun des deux champs ainsi obtenus, des valeurs c_{M0} et c_{T0} pour lesquels le champ considéré est licite pour Mises et Tresca donne :

$$\begin{array}{lcl} \text{Mises} & \begin{cases} c_{M0} = 3,0 \\ c_{T0} = 3,0 \end{cases} & \begin{cases} \frac{\delta H}{c} / \text{Mises} \geq 3,068 \\ \frac{\delta H}{c} / \text{Tresca} \geq 3,068 \end{cases} \\ \text{Tresca} & \begin{cases} c_{M0} = 3,408 \\ c_{T0} = 3,0 \end{cases} & \begin{cases} \frac{\delta H}{c} / \text{Mises} \geq 2,741 \\ \frac{\delta H}{c} / \text{Tresca} \geq 3,113 \end{cases} \end{array} \quad (15)$$

le champ fourni par le programme de Tresca est tel que $\sigma_\theta = \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ pour pratiquement tous les sommets de triangle. En outre si $F(\sigma) \leq 0$ on observe que σ_θ est peu différent de σ_2 , ce qui semble confirmer la validité de l'hypothèse de Haas Karman selon laquelle $\sigma_\theta = \sigma_2$ ou σ_3 . Par contre le champ issu du programme de Mises ne présente pas cette tendance à l'égalité de σ_θ avec l'une des deux autres contraintes principales.

Enfin il ressort de (15) que chaque programme a son utilité propre, autrement dit pour un maillage donné le programme spécifique du critère considéré donnera le meilleur résultat.

Un dernier test effectué avec le programme de Tresca et un maillage de 110 triangles analogue au précédent a abouti après analyse à :

$$\frac{\delta H}{c} / \text{Tresca} \geq 3,464 \text{ et } \frac{\delta H}{c} / \text{Mises} \geq 3,014 \text{ (502s CPU)}$$

Finalement pour ce problème nous obtenons

$$\frac{\delta H}{c} / \text{Mises} \geq 3,068 \text{ et } \frac{\delta H}{c} / \text{Tresca} \geq 3,464$$

Lors des essais sur le problème de l'écrasement d'une éprouvette cylindrique les bornes statiques, pour des maillages moins raffinés que le précédent, étaient nettement plus proches des bornes cinématiques. D'autre part la suppression des conditions de prolongement n'augmente pratiquement pas la valeur optimale de $\frac{\delta H}{c}$. Ceci nous conduit à penser que l'effort est à poursuivre du côté cinématique, ce qui n'exclut pas d'essayer d'améliorer encore les performances des programmes statiques, particulièrement pour Mises.

CONCLUSION GENERALE

Par voie analytique et numérique les valeurs de la hauteur limite des talus chargés uniformément sont bien précisées pour les matériaux de Tresca (ou Mises). Le problème de la fouille circulaire autorise une comparaison intéressante entre les comportements de ces deux matériaux. Les programmes utilisés sont opérationnels pour les matériaux de Mises, Tresca et Coulomb, l'approche statique dans le cas de Coulomb non standard conservant une signification mécanique certaine en dehors du cadre de l'A.L. Ainsi, par exemple dans le cas du mur de soutènement, l'Analyse Limite conduit-elle à un traitement global du problème mécanique, plus rationnel que celui employé usuellement. Par ailleurs la structure du problème statique se prête bien à une décomposition naturelle de la matrice des conditions : l'utilisation du code de DECOMPSX de l'Université Catholique de Louvain (Belgique) permettra sans doute d'améliorer le temps de résolution des problèmes numériques, particulièrement dans le cas tridimensionnel.

REFERENCES

- BOTTERO A., PASTOR J., TURGEMAN S., Calculs à la rupture par optimisation linéaire dans des modèles éléments finis tridimensionnels, 2^o Congrès Int. des Méthodes Numériques dans les Sciences de l'Ingénieur, déc. 1980, Paris.
- CHEN W.F. (1975), Limit analysis and soil plasticity, Development in Geotechnical Engineering, Vol.7, Elsevier, pp.399-445.
- COUSSY O., SALENCON J., (1979) Analyse de la stabilité des ouvrages en terre par le calcul à la rupture, Annales des Ponts et Chaussées, 4^o trim., 7-35.
- PASTOR J. (1976), Application de l'Analyse Limite à l'étude de la stabilité des pentes et des talus, thèse de 3^e cycle, IMG, Grenoble, FRANCE.
- PASTOR J. (1978), Analyse limite : détermination numérique de solutions statiques complètes. Application au talus vertical, Jour. de Mécanique Appliquée, (2), 167-196.
- PASTOR J., TURGEMAN S. (1979), Formulation linéaire des méthodes de l'Analyse Limite en symétrie axiale, 4^e Congrès Français de Mécanique, Nancy, FRANCE.
- REYNAUD G. (1979), Approche variationnelle de quelques problèmes en mécanique des solides, thèse de 3^e cycle, IMG, Grenoble, FRANCE
- SALENCON J. (1973), Théorie de la plasticité pour les applications à la Mécanique des Sols, Eyrolles, PARIS.