

INTERNATIONAL SOCIETY FOR SOIL MECHANICS AND GEOTECHNICAL ENGINEERING



This paper was downloaded from the Online Library of the International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering (ISSMGE). The library is available here:

<https://www.issmge.org/publications/online-library>

This is an open-access database that archives thousands of papers published under the Auspices of the ISSMGE and maintained by the Innovation and Development Committee of ISSMGE.

Arrachement des Fondations par l'Analyse Limitée

Pull-Out Load Capacity by Limit Analysis

A. BOTTERO,

R. NEGRE,

J. PASTOR and

S. TURGEMAN Laboratoire de Mécanique des Sols, Institut de Mécanique de Grenoble, France

RESUME

L'objet de cette note est de rappeler succinctement la théorie des charges limites et d'en faire l'application à un problème de Mécanique des Sols, celui de l'arrachement des fondations. On définit tout d'abord les hypothèses générales du problème, les conditions aux limites et les conditions de frottement aux interfaces sol-fondation. On décrit ensuite l'outil de calcul statique et cinématique basé sur la discrétisation en éléments finis. Les solutions analytiques et numériques proposées pour le problème de l'arrachement de fondations de formes diverses et comparées à des résultats expérimentaux sont ensuite présentées. L'étude de ce problème particulier met en évidence les perspectives offertes par ces méthodes dans l'étude de la stabilité des ouvrages de Génie Civil.

INTRODUCTION

Les méthodes de calcul des chargements limites en Mécanique des Sols adoptent généralement, pour les matériaux constitutifs des systèmes étudiés, le schéma de comportement rigide - parfaitement plastique. Sans sous-estimer l'intérêt pratique de ces méthodes: cercles de FELLENIUS, détermination de champs de contraintes localisés (SOKOLOVSKI)..., on peut s'interroger sur la signification physique des solutions qu'elles proposent.

Basés sur l'hypothèse d'une loi d'écoulement associée au critère de plasticité du matériau, les théorèmes de l'Analyse Limitée apportent une réponse précise à cette question et sont à l'origine de méthodes rationnelles permettant d'encadrer les chargements limites des systèmes étudiés. La loi d'écoulement associée n'est acceptable que pour certains matériaux, les argiles molles non drainées. Pour les matériaux pulvérulents, une extension des Théorèmes de l'Analyse Limitée a été établie par RADENKOVIC [5] mais elle ne permet pas de préciser suffisamment le domaine des chargements limites.

L'application analytique des méthodes de l'Analyse limite même dans le cas de la déformation plane, reste laborieuse et ne conduit pas toujours à des résultats précis.

Ces difficultés ont suscité leur mise en oeuvre numérique, basée sur une discrétisation en éléments finis, suivant en cela les travaux de LYSMER [3] (programme statique), FREMOND et SALENCON [2] (programme cinématique).

1 - POSITION DU PROBLEME

Hypothèses

- écoulement initial (petites déformations) et déformation plane
- fondations indéformables à géométrie définie sur la Fig. 1.
- comportement du sol rigide - parfaitement plastique, obéissant au critère de TRESCA ($\sigma_1 - \sigma_3$) + $4\tau_{xy} - 4c = 0$ (c = coefficient de cohésion) et à la loi d'écoulement du potentiel plastique classique.

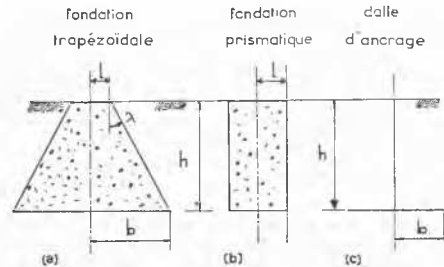


Fig. 1 Géométrie des fondations

Conditions aux limites à la frontière du système sol-fondation : elles sont définies sur la Fig. 2.

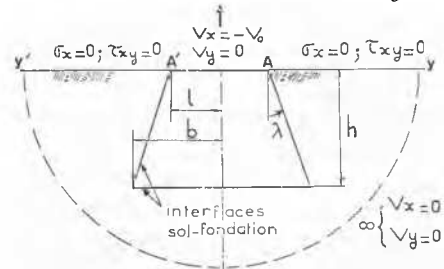


Fig. 2 Conditions aux limites

Paramètres de chargement : le problème de l'arrachement des fondations est un problème à 3 paramètres de chargement adimensionnels :

$$Q_1 = \frac{F_x}{c h}, \quad F_x \text{ composante algébrique sur } Ox \text{ de la force d'arrachement.}$$

$$Q_2 = \frac{F_z}{c}, \quad \gamma \text{ poids volumique du sol.}$$

$$Q_3 = \frac{\delta' q}{c} \quad \gamma'$$

pois volumique de la fondation.
Les paramètres de vitesses de déformation associés sont :

$$\dot{q}_1 = -V_0 \cdot c \cdot h$$

$$\dot{q}_2 = \int_{S'} v_x \cdot ds_x \cdot \frac{c}{R} \quad \text{avec } v_x$$

composante sur Ox de la vitesse de déplacement.

$$\dot{q}_3 = -V_0 \cdot S \cdot \frac{c}{R}$$

avec S aire de la section de la fondation dans le plan Oxy
S' : complémentaire de S dans le 1/2 plan des x > 0
($\dot{q}_3 = -2bV_0 \cdot \frac{c}{R}$ dans le cas des dalles d'ancrage).

Type de solution cherchée : on se propose de déterminer l'effort limite d'arrachement correspondant à l'écoulement libre dans le cadre de la théorie des charges limites.

2 - THEOREMES DE L'ANALYSE LIMITE [6]

Soit un système A de frontière S et de volume V constitué de matériaux obéissant au principe du travail maximal et soumis à un processus de chargement à n paramètres.

Théorème statique (fig. 3a) tout chargement limite Q^* appartient à la frontière F (K) du convexe K de R^n ensemble des chargements licites de A défini comme suit :

$K = \{Q(\sigma) / \sigma \text{ licite (statiquement et plastiquement admissible)}\}$ et Q^* est dirigé suivant une normale extérieure à F (K). La méthode statique (fig. 3a), basée sur ce théorème, permet une approche intérieure de F (K). On obtient le chargement limite :

$$Q^* = (Q_1^d, \dots, Q_n^d) \quad (Q_i^d \geq 0 \text{ ou } Q_i^d \leq 0)$$

composante de Q^* fixée, $Q_i^d \geq 0$) en résolvant le problème :

$$Q_{i_0}^d = \text{Max} \{Q_{i_0} \geq 0 / \exists \sigma \text{ licite} \Rightarrow Q(\sigma) = (Q_1^d, \dots, Q_{i_0}^d, \dots, Q_n^d)\}$$

Théorème cinématique (fig. 3b) le convexe K est égal à l'intersection des demi espaces E_v de R^n tels que :

$$E_v = \{Q / Q \cdot q(v) - P(v) \leq 0, v \text{ licite}\}$$

où P (v) est la puissance dissipée dans v
En résolvant, pour différentes directions q_d le problème :

$$P(\hat{v}_i) = \text{Min} (P(v) / v \text{ licite et } q(v) = q_d)$$

on définit des hyperplans tangents à K, d'équations :

$$Q \cdot q_d - P(\hat{v}_i) = 0$$

qui déterminent une approximation extérieure de la frontière F (K).

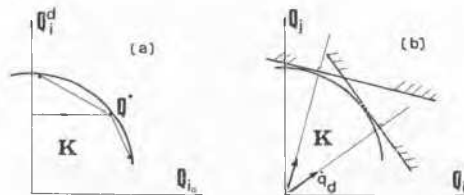


Fig. 3 Méthodes statique et cinématique

3 - SOLUTIONS ANALYTIQUES

Nous ne présentons ici que les résultats analytiques relatifs aux fondations trapézoïdales à interface lisse [8] .

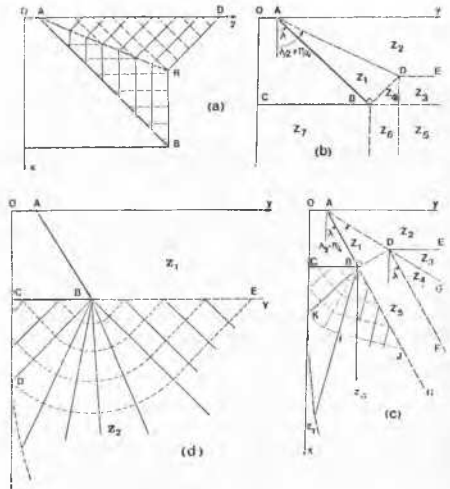


Fig. 4 Champs de contraintes

3.1 Application de la méthode statique :

L'approche intérieure de F (K) est obtenue à partir des champs de contraintes : σ_{p1} et σ_{p2} , qui prolongent le champ plastique σ_p défini uniquement sur ABR (fig. 4a) et du champ σ_3 .

3.1.1. Description de σ_p

σ_p , qui correspond à un état de butée par rapport à AB, est composé de 2 zones, séparées par la ligne de discontinuité AR et a pour expression :

- sur ADR : $\sigma_x = \delta \cdot x$; $\sigma_y = \delta \cdot x + 2c$; $\tau_{xy} = 0$

- sur ABR : $\sigma_x = c(1 - 2 \sin \lambda \cos 2\lambda) + \delta \cdot x$

$$\sigma_y = \sigma_x + 2c \cos 2\lambda$$

$$\tau_{xy} = -c \sin 2\lambda$$

3.1.2. Description de σ_{p2} (fig. 4b)

σ_{p2} , composé de 7 zones Z_i (i = 1,7) séparées par des lignes de discontinuités en contraintes, est licite pour $Q_2 \geq 0$. La définition de σ_{p1} sur Z_1 et Z_2 est identique à celle de σ_p respectivement sur ADR et ABR. Sur les autres zones, σ_{p1} a pour expression :

- sur Z_3 $\sigma_x = \delta \cdot x$; $\sigma_y = -2c \sin \lambda + \delta \cdot x$; $\tau_{xy} = 0$

- sur Z_4 $\sigma_x = \sigma_y = \delta \cdot x - 2c \sin \lambda$; $\tau_{xy} = 0$

- sur Z_5 $\sigma_x = \delta \cdot x$; $\sigma_y = \delta \cdot x - 2c$; $\tau_{xy} = 0$

- sur Z_6 $\sigma_x = \delta \cdot x - 2c \sin \lambda$; $\sigma_y = \delta \cdot x - 2c$; $\tau_{xy} = 0$

- sur Z_7 $\sigma_x = \delta \cdot x - \text{Min}(\delta \cdot h, 4c)$

$$\sigma_y = \delta \cdot x - 2c$$
 ; $\tau_{xy} = 0$

3.1.3. Description de σ_{p2} (fig. 4c)

σ_{p2} est égal à σ_{p1} sur ABDE. Il est défini comme suit

sur Z3: $\sigma_x = \delta \cdot x$; $\sigma_y = \delta \cdot x - 2 \cdot c$; $\tau_{xy} = 0$

sur Z4: $\sigma_x = c [2 \sin \lambda + \cos 2\lambda - 1] + \delta x$
 $\sigma_y = \sigma_x - 2 \cos 2\lambda \cdot c$
 $\tau_{xy} = c \cdot \sin 2\lambda$

sur Z5: $\sigma_a = \delta \cdot x - 2 \cdot c \cdot \sin \lambda$; $\sigma_b = \delta \cdot x + 2 \cdot c \cdot (\sin \lambda - 1)$
 $\varphi = (\sigma_x, \sigma_1) = \lambda + (\alpha - 1) \cdot \pi/2$
 $\alpha = 1, \beta = 2 \sin \lambda \leq \pi/6$; $\alpha = 2, \beta = 1 \text{ si } \lambda > \pi/6$

L'expression de σ_{P2} sur Z6 et Z7 est donnée en supposant que dans ces zones, la cohésion est a ($0 < a \leq c$).
 Sur CBJK, σ_{P2} est un champ de PRANDTL défini par :

$P = \lambda - \frac{\pi}{2}$; $X = ((\sigma_1 + \sigma_2)/2 - \gamma \cdot z)/2 \cdot c = c \cdot (\sin \lambda - 1)/a - \frac{z}{2}$
 sur BIJ; $\varphi = -\pi/2$; $X = c \cdot (\sin \lambda - 1)/a - \frac{z}{2} - \lambda$ pour CBK,
 l'éventail de PRANDTL ayant pour sommet B et pour ouverture λ ; ce champ est ensuite prolongé sur Z6 et Z7 suivant la méthode de SHIELD [7]

La valeur de a résulte de celle de σ_x (M) (NECB) qui doit être positive ou nulle. En posant :

$= (2c(\sin \lambda - 1) + \gamma \cdot h) / 2(1 + \lambda)$ quand $m \leq Q_2 \leq M$
 $= c$ quand $Q_2 \gg M$

où: $m = 2(1 - \sin \lambda)$, $M = 2(2 + \lambda - \sin \lambda)$, σ_{P2} est licite pour $Q_2 \gg m$.

1.4 Description de σ_3 (fig. 4d)

σ_3 est défini sur Z1 par $\sigma_x = \sigma_y = \delta \cdot x$; $\tau_{xy} = 0$; comme pour σ_{P2} , l'expression de σ_3 sur Z2 est donnée, en supposant que dans cette zone la cohésion est égale à a ($0 \leq a \leq c$).
 Sur CBED est un champ de PRANDTL défini par ($\varphi = -\pi/2$; $X = -\frac{z}{2} - \frac{\pi \lambda}{2}$) sur BDC et ($\varphi = 0, \lambda = -1/2$) sur DFE, l'éventail de PRANDTL ayant pour sommet B et pour ouverture $\pi/2$. Le prolongement sur tout Z2 est fait suivant la méthode de SHIELD.

avec $a = \delta \cdot h / (\pi + 2)$ pour $0 \leq Q_2 \leq \pi h$ et $a = c$ pour $Q_2 \gg \pi h$, σ_3 est licite pour $Q_2 \gg 0$.

1.5 Résultats obtenus à partir de σ_{P1}, σ_{P2} et σ_3 :

Dans l'espace $Q_1, Q_2, Q_3, \sigma_{P1}$ et σ_{P2} définissent les surfaces planes suivantes :

1: $Q_1 = -4(1 - \sin \lambda) \gamma g \lambda$ si $0 \leq Q_2 \leq M$ ($N_1 = (1, \gamma g, \frac{b+c}{h})$)
 2: $Q_2 = -4((1 - \sin \lambda) \gamma g \lambda + \frac{b}{h} (2 + \lambda - \sin \lambda))$ si $Q_2 \gg M$

$N_2 = 1, \gamma g \lambda - 2b/h, (b+c)/h$ et σ_3 les surfaces :

3: $Q_1 = 0$ si $0 \leq Q_2 \leq \pi + 2$
 4: $Q_2 = -2b(\pi + 2)/h$ si $Q_2 \gg \pi + 2$

1.2 Application de la méthode cinématique :

cherchant à approcher K par des plans parallèles à S1, S2, S3 et S4 pour préciser au mieux F (K), nous considérons les champs de vitesses de déformation v tels que :

- $\dot{q}(v) = \dot{q}_{d1} = -V_0 \cdot c \cdot h \cdot N_1$
 - ou $\dot{q}(v) = \dot{q}_{d2} = -V_0 \cdot c \cdot h \cdot N_2$

2.1 Champs de vitesses de déformation $v_1(\theta)$

Ils dérivent des champs de vitesses de déplacement $u_1(\theta)$ représentés sur la fig. 5a, quelque soit θ compris entre $\pi/2$ et $\pi + \lambda$, nous avons :

$-P_1(\theta) = 2 \cdot c \cdot h \cdot V_0 \cdot \sin \lambda / \cos \theta \cdot \sin(\lambda - \theta)$, $(P_1(\theta))$:

puissance dissipée dans $v_1(\theta)$)

$-q(v_1(\theta)) = \dot{q}_{d1}$

Le minimum de $P_1(\theta)$, obtenu pour $\theta = \hat{\theta} = \frac{\lambda + 3\pi}{4}$ définit le plan C1 extérieur à K et d'équation :

$Q \cdot N_1 = -2 \sin \lambda / \sin(\frac{\lambda + \pi}{4}) \cdot \cos(\frac{\lambda - \pi}{4})$

3.2.2 Champs de vitesses de déformation $v_2(\theta, \mu)$:

Ils dérivent des champs $u_2(\theta, \mu)$ (fig. 5b). Nous avons, pour θ compris entre $\pi/2$ et $\pi + \lambda$ et μ compris entre 0 et $\pi/2$:

$P_2(\theta, \mu) = 2 \cdot c \cdot V_0 (b(\gamma g \mu + 2(\theta - \mu) - \gamma g \theta) - h(\frac{2 \cos \mu}{\cos \theta} + \frac{\sin \lambda}{\sin(\theta - \lambda)}))$

$\dot{q}(v_2(\theta, \mu)) = \dot{q}_{d2}$

Notons $P_2(\hat{\theta}, \hat{\mu})$ le minimum de $P_2(\theta, \mu)$. Alors le champ $v_2(\hat{\theta}, \hat{\mu})$ définit le plan C2 d'équation :

$Q \cdot N_2 = -P_2(\hat{\theta}, \hat{\mu}) / c \cdot h \cdot V_0$

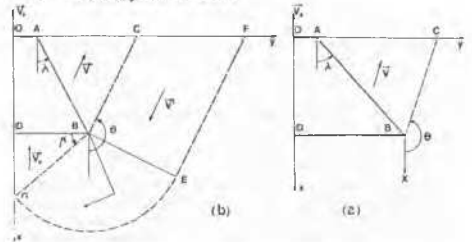


Fig. 5 Champs de vitesses de déplacement

3.3 Représentation des résultats obtenus :

Nous avons représenté sur la fig. 6a les traces des approches intérieure et extérieure de F (K) dans le plan $Q_3 = 0$ (fondation non pesante) quand $l = 0$, et pour $\lambda = \pi/6$

De même la fig. 6b représente les traces de ces approches dans le plan $Q_3 = 0$ lorsque la fondation considérée est une fondation à dalle caractérisée par $\lambda = \text{Arctg}(b/h) = 10^\circ$

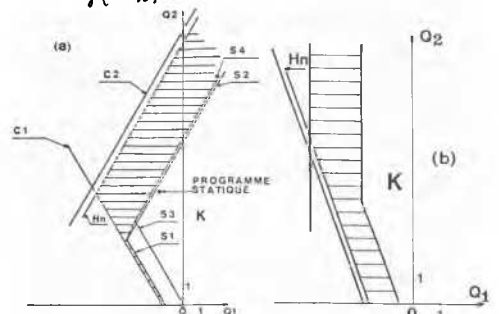


Fig. 6 Approches Statiques et cinématiques

4 - SOLUTIONS NUMERIQUES [4]

4.1 Programmes de calcul

Le programme statique, basé sur un modèle éléments finis triangulaires à interpolation linéaire de champs de contraintes licites et autorisant certaines discontinuités permet de maximiser un paramètre de chargement (ici la force d'arrachement).

Le programme cinématique, basé sur un modèle éléments finis triangulaires à interpolation linéaire de champs de vitesses de déplacement licites et autorisant certaines lignes de discontinuité permet de minimiser la puissance dissipée dans l'écoulement P (v) et d'en déduire l'équation d'un hyperplan tangent extérieurement au convexe des chargements limites.

Pour chacun des programmes, la linéarisation du critère de TRESCA plan, conduit à un problème de programmation linéaire.

4.2 Résultats numériques

Le programme cinématique a été utilisé pour la détermination des frontières du convexe K dans le cas des fondations de la fig. 1. La trace de l'hyperplan noté Hn, obtenu numériquement pour une fondation trapézoïdale ($\lambda = 1/6, R=0$) est indiqué sur la fig. 6a. De même la fig. 6b montre la trace de Hn fournie par le programme cinématique appliqué à l'arrachement d'une dalle d'ancrage avec $\lambda = 10^\circ$

Le programme statique a fourni dans le premier cas un point du plan (Q_1, Q_2) pratiquement situé sur la trace du plan correspondant à la borne statique analytique (fig. 6a). D'autres essais sont nécessaires pour apprécier les possibilités d'amélioration des solutions statiques numériques.

5 - COMPARAISON A DES RESULTATS EXPERIMENTAUX

Les solutions au problème de l'arrachement des dalles fournis par l'Analyse limite ont été comparées aux résultats d'une série d'essais d'arrachement dans une argile molle non drainée de poids volumique $\gamma = 1,93 \text{ g/cm}^3$ et de cohésion C voisine de 50 g/cm^2 [1].

La fig. 7 permet de constater que les valeurs expérimentales sont voisines des solutions cinématiques théoriques tout en demeurant plus élevées. Ce paradoxe s'explique par :

- l'approximation de la déformation plane par une plaque rectangulaire ($a = 12 \text{ cm}$; $b = 2 \text{ cm}$)

- une déformation importante du sol avant rupture contraire à l'hypothèse des petites déformations (surtout pour les dalles fortement enfoncées ($h=15 \text{ cm}$)).

L'intérêt des résultats théoriques apparaît cependant sous 2 formes :

- les bornes cinématiques fournissent quelle que soit la profondeur initiale d'enfoncement une approche correcte des valeurs expérimentales.

- on note une bonne concordance entre la profondeur critique d'enfoncement initial observée lors des différents essais et la profondeur critique correspondant aux résultats théoriques fournis par la méthode cinématique.

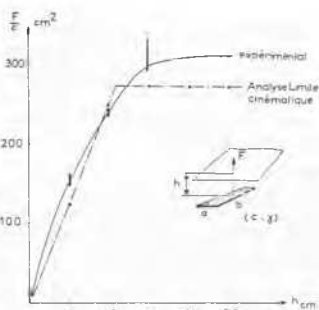


Fig. 7 Comparaison avec des Résultats Expérimentaux

CONCLUSION

L'application des méthodes de l'Analyse limite au problème de l'arrachement de fondations de formes diverses a permis d'obtenir un convexe des chargements limites pour ce problème d'écoulement.

Les résultats théoriques comparés à ceux d'une série d'essais d'arrachement dans une argile saturée non drainée ont montré, compte tenu des différences entre les conditions expérimentales et les hypothèses de calcul, une bonne concordance quant aux valeurs des efforts et à l'allure des courbes effort-enfoncement.

L'utilisation simultanée des méthodes statique et cinématique de l'Analyse limite, rigoureuses pour les matériaux standard devrait permettre de préciser le sens des solutions antérieures dans ce domaine et de proposer une double approche des chargements limites dans la majorité des cas où il n'existe pas de solution complète tel celui de l'arrachement des fondations.

L'utilisation numérique de ces méthodes pour les problèmes tridimensionnels et un essai d'adaptation aux matériaux non standards constituent les principales extensions actuellement en cours.

REFERENCES

- 1 BATBANABANE L. (1973), " Résistance Maximale à l'Arrachement des Ancrages en milieu cohérent ", Thèse Docteur Ingénieur, GRENOBLE.
- 2 FRÉMOND M. et al (1974) " Méthodes Variationnelles pour le Matériau Rigide-Plastique ", Symposium Franco-Polonais de Rhéologie et Mécanique des Sol.
- 3 LYSNER J. (1970) " Limit Analysis of Plane Problems in Soil Mechanics ", Journal of Soil Mechanics and Foundation Division.
- 4 PASTOR J. et TURGEMAN S. (1976) " Mise en oeuvre Numérique des Méthodes de l'Analyse Limite pour les Matériaux de Von MISES et de COULOMB Standard en Déformation Plane " à paraître dans Mechanics Research Communications.
- 5 RADENKOVIC D. (1961) " Théorèmes Limites pour un Matériau de COULOMB ", C.R.A.S. 252 pp 4103 - 4104 - PARIS.
- 6 SALENCON J. (1974) " Théorie de la Plasticité pour les Applications à la Mécanique des Sol" - Eyrolles - PARIS.
- 7 SHIELD R.T (1954) " Plastic Potential Theory and PRANDTL Bearing Capacity Solution ", J. Appl. Mech. 21, 193 - 194.
- 8 TURGEMAN S. (1976) " Etude des Fondations Sollicitées à l'Arrachement par la Théorie de l'Analyse Limite ", Thèse Doctorat de Spécialité, Institut de Mécanique de GRENOBLE.