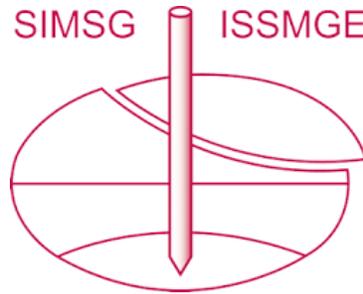


INTERNATIONAL SOCIETY FOR SOIL MECHANICS AND GEOTECHNICAL ENGINEERING



This paper was downloaded from the Online Library of the International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering (ISSMGE). The library is available here:

<https://www.issmge.org/publications/online-library>

This is an open-access database that archives thousands of papers published under the Auspices of the ISSMGE and maintained by the Innovation and Development Committee of ISSMGE.

Résolution théorique de la distribution des forces dans des pieux

Theoretical Solution of Stress Distribution in Piles

J. A. J. SALAS, INGÉNIEUR CC y P, *Professeur au Escuela de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos, Madrid, Espagne*

J. A. BELZUNCE, INGÉNIEUR CC y P, *Directeur du Gabinete de Cálculo del Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas, Madrid, Espagne*

SOMMAIRE

On étudie la solution théorique de la distribution des forces le long d'un pieu flottant chargé, ainsi que dans le cas du frottement négatif. On suppose que le terrain possède les propriétés du demi-espace de Boussinesq et que le pieu est réduit à une ligne. On pose la compatibilité des affaissements du terrain avec l'existence du pieu, en employant l'équation de Mindlin, et l'on arrive à poser les équations intégrales qui se résolvent numériquement à l'aide d'un ordinateur électronique.

SUMMARY

This paper deals with the solution of stresses along a loaded pile taking negative friction into account. It is assumed that the soil has the properties of a Boussinesq half-space and that the pile is reduced to a line. The compatibility between settlement in the soil and stresses along the pile are determined by Mindlin's equation, in order to arrive at integral equations which can be solved by electronic computer.

DANS CE RAPPORT, nous présentons quelques solutions théoriques au problème de la distribution des forces le long d'un pieu. Pour cela, nous considérons le pieu réduit à une ligne de longueur constante, comprise dans un demi-espace de Boussinesq. Nous supposons qu'il n'y a aucun glissement entre le pieu et le sol, ce qui revient à dire que l'adhésion entre le pieu et le sol est plus forte que la force tranchante qui se produit dans tous les points du périmètre. Cependant, les solutions auxquelles nous allons arriver pourraient facilement s'appliquer au cas où un glissement se produirait en une certaine portion du pieu. Trois cas vont être considérés: pieu flottant, friction négative sur un pieu flottant et friction négative sur un pieu-colonne.

PIEU FLOTTANT

Supposons qu'un pieu est planté dans le sol, sous les conditions théoriques décrites ci-dessus. Supposons aussi qu'une charge P a été placée sur la tête de ce pieu. Le pieu va subir un affaissement égal à k , qui sera le même sur tous ses points, puisque nous l'avons représenté comme une ligne de longueur constante. Tandis que se produit cet affaissement, une force va s'exercer entre le pieu et le sol, en fonction de la profondeur c , force que nous pouvons représenter par $\phi(c)$. C'est précisément cette fonction que nous voulons trouver. L'affaissement sur un point du pieu, d'une profondeur Z_n se produira comme intégrale de chacune des forces élémentaires appliquées le long du pieu, multipliée par une fonction que nous appellerons $K(c_1, z_n)$, c étant la profondeur d'application de la force élémentaire. L'affaissement étant constant sur chaque point du pieu, nous pouvons écrire:

$$\int_0^L K(c_1 z_n) \phi(c) dc = k \quad (1)$$

ce qui correspond aux équations de premier type de Fredholm. Cette équation est non-homogène et singulière, puisque la fonction K prend une valeur infinie lorsque $c = z_n$.

Cette équation intégrale, une fois résolue, nous donnera la solution du problème. La fonction K fut donnée par Mindlin (1936) et est égale à:

$$K(c_1 z_n) = \frac{P}{16\pi(1-\mu)G} \times \left\{ \frac{3-4\mu}{R_1} + \frac{8(1-\mu)^2 - (3-4\mu)}{R_2} + \frac{(z-c)^2}{R_1^3} + \frac{(3-4\mu)(z+c)^2 - 2zc}{R_2^3} + \frac{6cz(c+z)^2}{R_2^5} \right\} \quad (2)$$

La signification de z , c , R_1 et R_2 est définie sur la fig. 1. Le module de déformation transversal est G , égal à $E/2(1+\mu)$. La fonction $K(c, z)$ a été calculée avec un ordinateur électronique, et les résultats sont résumés sur la fig. 1.

Les valeurs représentées sur le nommogramme sont ceux d'un coefficient d'influence V , et la valeur w de l'affaissement sera:

$$w = (P/c \cdot G) V. \quad (3)$$

Les valeurs de la fonction $K(c, z)$ pour $r = 0$ et $z/c < 1$ sont très supérieures aux autres, et elles sont représentées à une échelle 10 fois inférieures. De cette manière, dans le cas de $r = 0$ et $z/c < 1$,

$$w = (10P/c \cdot G) V. \quad (3a)$$

Observons l'influence importante de la valeur μ et la forme étrange de la courbe correspondante à la valeur $\mu = \frac{1}{2}$, particulièrement à la profondeur de l'application de la force pour des valeurs réduites de r . La forme de cette courbe est l'expression d'un phénomène similaire, dans le cas de Mindlin, au phénomène de soulèvement du sol, dans le cas de Boussinesq, aux alentours de la force, lorsque $\mu = \frac{1}{2}$.

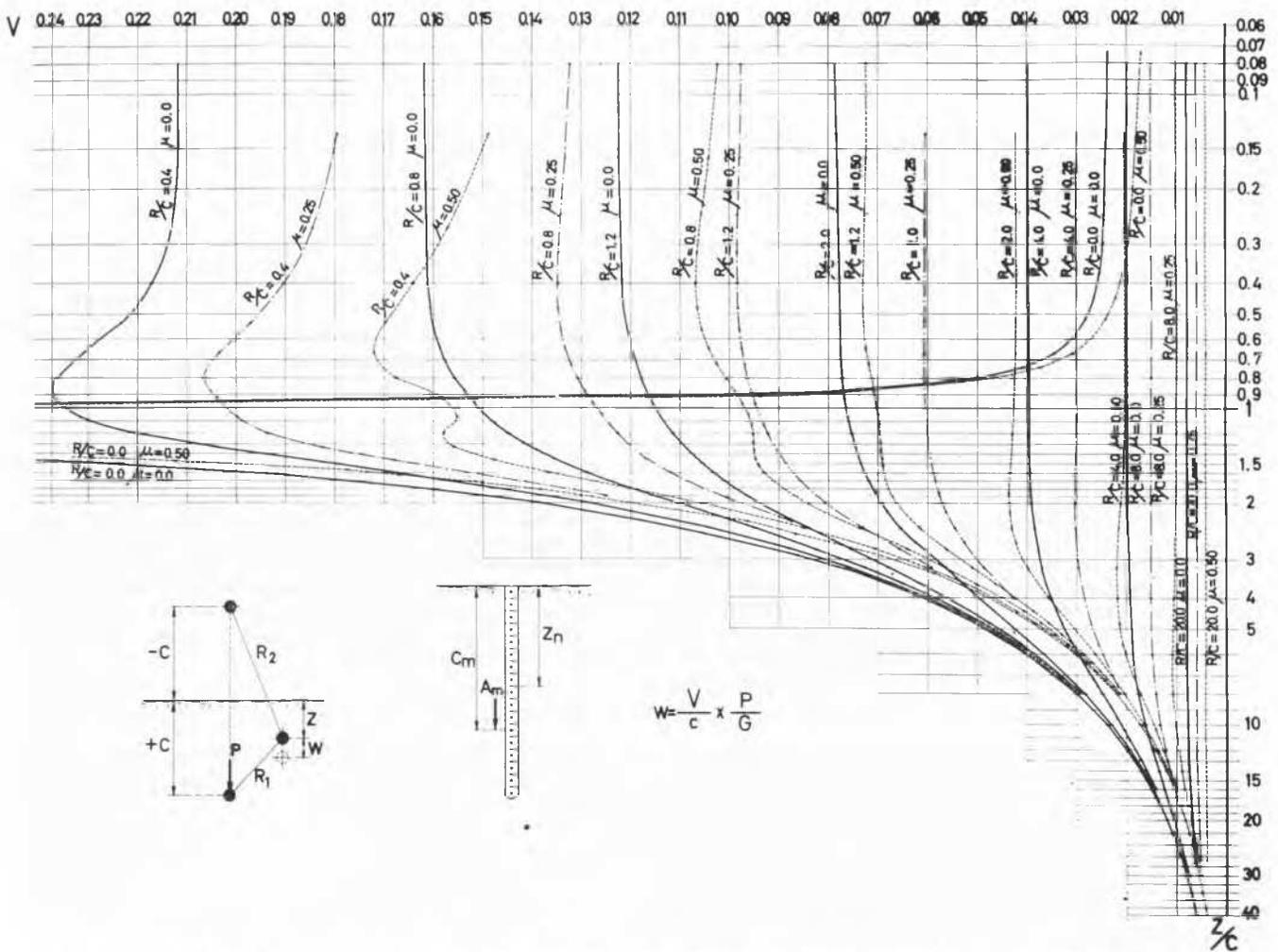


FIG. 1. Signification des symboles. Valeurs du coefficient d'influence V pour le calcul de l'affaissement selon Mindlin.

FRICION NÉGATIVE SUR UN PIEU FLOTTANT

Supposons qu'un pieu est planté dans un terrain qui subit une consolidation. Chaque point du terrain, dans les zones éloignées du pieu, subira un affaissement proportionnel à son altitude sur le fond de la couche compressible. Supposons maintenant que la pointe du pieu descende d'une magnitude égale à celle des points du sol qui, initialement, se trouvaient à la même hauteur que la pointe du pieu, ce qui revient à dire que la pointe du pieu ne causera aucune déformation dans le sol. La couche compressible, située entre la pointe du pieu et la surface, tend à souffrir un raccourcissement proportionnel à son altitude sur cette pointe, mais, à la verticale, la présence du pieu empêchera ce raccourcissement.

La situation est la même que si le pieu avait été dilaté, imposant ainsi un soulèvement équivalent à un affaissement négatif sur le sol, proportionnel à l'altitude du point considéré sur la pointe. D'une façon analogue à notre équation antérieure, nous pouvons écrire

$$\int_0^L K(c, z_n) \Psi(c) dc = \alpha(L - z_n). \quad (4)$$

Cette équation intégrale nous donnera une fonction $\psi(c)$ qui en principe résoudreait le problème. Cependant, en vérifiant, nous trouverons que

$$\int_0^L \Psi(c) dc = -F \neq 0 \quad (5)$$

malgré que nous supposons que le pieu ne subisse aucune charge extérieure. Ce qui prouve que la position assumée pour la pointe n'est pas correcte.

Cependant le problème est facilement résolu, en appliquant une force fictive $P = F$ au pieu, et en trouvant la distribution des forces par superposition de la fonction $\Psi(c)$ à $\phi(c)$, trouvée dans le cas antérieur.

FRICION NÉGATIVE SUR UN PIEU-COLONNE

Nous allons maintenant considérer un pieu dont la pointe repose sur une couche très résistante, de telle sorte qu'il subit un affaissement très négligeable en rapport à la déformabilité de la couche compressible. Les conditions de tension restent décrites de façon adéquate dans l'Eq 4 et la force résiduelle (Eq 5) qui apparaîtra sera précisément la charge produite par la friction négative sur la pointe du pieu.

On doit cependant noter que dans ce cas la solution est seulement approximative, car la présence de la couche rigide demanderait l'emploi d'une équation différente de celle déduite par Mindlin. Une approximation différente peut se faire au moyen de forces-miroir, comme le fit d'Appolonia et Romualdi (1963), mais nous devons souligner que cette

solution est aussi approximative, car, pour ces forces-miroir, l'équation de Mindlin ne serait pas valide. D'autre part, le cas ainsi résolu équivaudrait à celui de l'interface absolument glissante, qui ne correspond pas au cas réel. Pour ces raisons, nous n'avons pas effectué cette correction dans ce rapport.

RÉSOLUTION DES CAS ANTÉRIEURS PAR CALCUL AU MOYEN DES DIFFÉRENCES FINIES

Les fonctions qui composent les équations posées sont compliquées, et c'est pourquoi nous ne sommes pas encore arrivés à les résoudre. Cependant il est très possible de la faire au moyen des différences finies.

Nous divisons le pieu en vingt petites sections, et nous supposons que les forces distribuées le long du segment du pieu se trouvent concentrées au point moyen du segment. Nous trouvons donc vingt forces A , définies par

$$A_m \simeq \int_{c=(m-1)L/20}^{*mL/20} \phi(c)dc \quad (6)$$

Nous continuons à calculer les affaissements des extrémités des segments, grâce à quoi la solution des équations intégrales antérieures se trouve réduite à la solution de vingt équations linéaires, avec vingt inconnues. Ce qui s'effectue rapidement au moyen d'un ordinateur IBM 1620.

En considérant les forces A appliquées au centre des segments, et en calculant les affaissements en leurs extrémités, on évite l'indétermination présente au point d'application de la force, ce qui a obligé d'Appollonia et Romualdi (1963) à trouver une solution approximative de l'affaissement en ce point. Cependant, en échange, une certaine oscillation périodique se produit pour les valeurs des racines

trouvées, oscillation dont l'origine est l'erreur produite en ce qui concerne l'affaissement de la pointe du pieu, en passant aux différences finies. Cette erreur se corrige facilement en introduisant un petit affaissement supplémentaire à la pointe du pieu, ce qui nous permet d'obtenir une nouvelle série de valeurs des racines. Les points d'intersection des deux fonctions de distribution des forces ainsi trouvées peuvent être considérés comme exacts.

Pour notre part, nous avons trouvé non pas deux, mais quatre fonctions différents dans chaque cas, en introduisant des valeurs différentes au petit affaissement fictif de la pointe du pieu, et nous avons vérifié que cette précaution n'était pas nécessaire, puisque, avec seulement deux fonctions, l'exactitude est pratiquement la même.

TABLEAU I. VALEURS DE a_1

m	$\mu = 0$	$\mu = 0.25$	$\mu = 0.50$
1	0.02704	0.03400	0.04156
2	0.03668	0.03981	0.04287
3	0.04001	0.04191	0.04355
4	0.04204	0.04320	0.04411
5	0.04350	0.04417	0.04460
6	0.04467	0.04490	0.04511
7	0.04567	0.04565	0.04554
8	0.04656	0.04635	0.04603
9	0.04740	0.04709	0.04652
10	0.04821	0.04765	0.04704
11	0.04904	0.04838	0.04759
12	0.04989	0.04911	0.04824
13	0.05082	0.04991	0.04895
14	0.05188	0.05079	0.04981
15	0.05312	0.05200	0.05086
16	0.05466	0.05338	0.05225
17	0.05673	0.05531	0.05406
18	0.05983	0.05830	0.05692
19	0.06559	0.06387	0.06226
20	0.08666	0.08422	0.08213

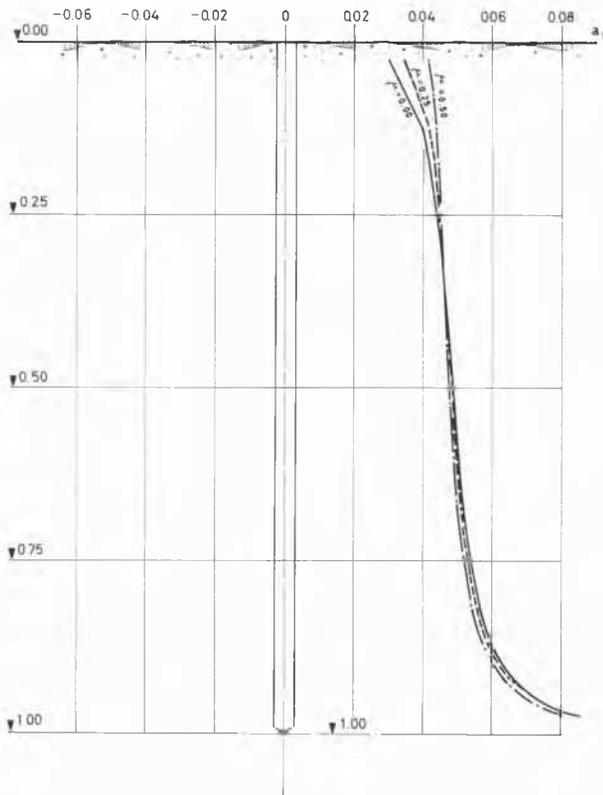


FIG. 2. Coefficient d'influence a_1 pour le calcul de la distribution des forces dans un pieu flottant chargé.

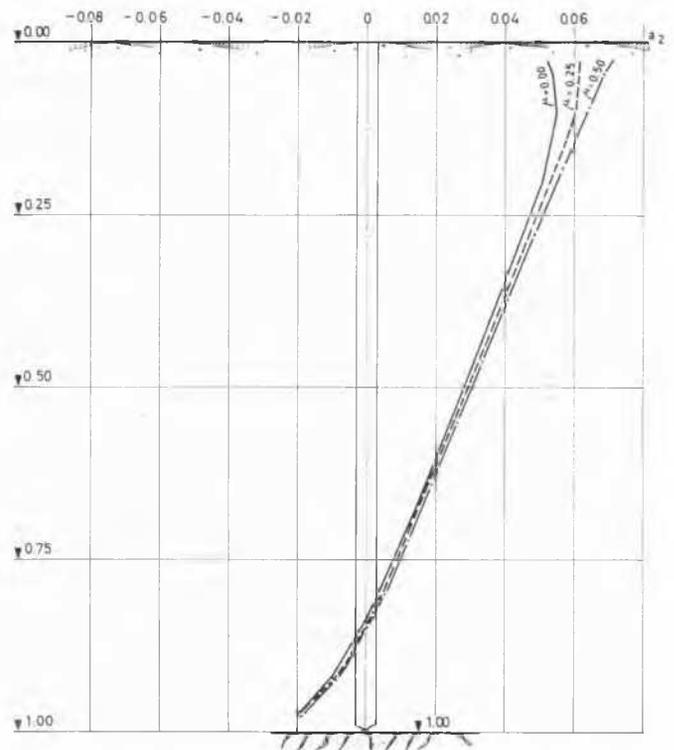


FIG. 3. Coefficient d'influence a_2 pour le calcul de la distribution des forces produites par le frottement négatif dans un pieu-colonne.

RÉSULTATS

Les résultats de cette analyse sont résumés dans les figs. 2, 3 et 4 et dans les tableaux I, II et III. La fig. 2 et le tableau I nous donnent la distribution des forces le long d'un pieu flottant chargé. Les valeurs a_1 qui y figurent sont liées aux forces A qui sont les forces concentrées que nous supposons appliquées à chacune des 20 petites sections dans lesquelles nous avons divisé le pieu, par la relation suivante:

$$A_m = a_{1m}P, \quad (7)$$

Comme nous pouvons voir, la distribution des forces le long du pieu n'est pas uniforme mais croissante vers la pointe.

TABLEAU II. VALEURS DE a_2

m	$\mu = 0$	$\mu = 0.25$	$\mu = 0.50$
1	0.05109	0.06063	0.07062
2	0.05753	0.06205	0.06646
3	0.05578	0.05893	0.06196
4	0.05271	0.05519	0.05753
5	0.04923	0.05122	0.05321
6	0.04555	0.04730	0.04898
7	0.04180	0.04333	0.04481
8	0.03797	0.03935	0.04069
9	0.03413	0.03537	0.03660
10	0.03025	0.03139	0.03253
11	0.02635	0.02739	0.02845
12	0.02240	0.02338	0.02438
13	0.01840	0.01931	0.02026
14	0.01432	0.01520	0.01610
15	0.01015	0.01097	0.01184
16	0.00580	0.00662	0.00746
17	0.00125	0.00202	0.00284
18	-0.00378	-0.00300	-0.00217
19	-0.00981	-0.00901	-0.00815
20	-0.02101	-0.02000	-0.01893
	0.52011	0.55769	0.59547

Sur la fig. 3, et le tableau II, nous voyons la distribution approximative des charges sur un pieu reposant par la pointe sur une couche rigide, et compris dans une couche en cours de consolidation. Les forces A_m ont la valeur:

$$A_m = a_{2m} \times G \times \Delta \times L, \quad (8)$$

Δ représentant la descente que subit la surface du terrain, à un point très éloigné du pieu.

Comme nous le voyons, les forces A_m dépendent de la longueur du pieu, mais il ne faut pas oublier qu'il s'agit des forces concentrées, appliquées sur une section d'une longueur $L/20$. Ainsi les efforts tranchants entre le pieu et le terrain ne dépendent pas de la longueur du pieu.

La somme ΣA_m nous donnera la charge totale produite par la friction négative sur le pieu. Enfin la fig. 4 et le tableau III nous donnent l'effet de la consolidation du terrain sur un pieu flottant. La formule à appliquer a la même forme que Eq 8, Δ représentant dans ce cas la diminution d'épaisseur de la couche, traversée par le pieu. La voie que nous avons suivie peut s'appliquer à l'étude de l'influence entre pieux rapprochés.

Le manque de place nous empêche d'inclure ici les résultats que nous avons obtenus sur ce problème. Ils seront présentés dans une autre publication (Salas et Lorente de No Cabezas, 1965). On présentera aussi le cas où il y aura un glissement entre une partie du pieu et le sol. Les applications numériques de la formule 8 démontrent que ce sera le cas réel le plus fréquent.

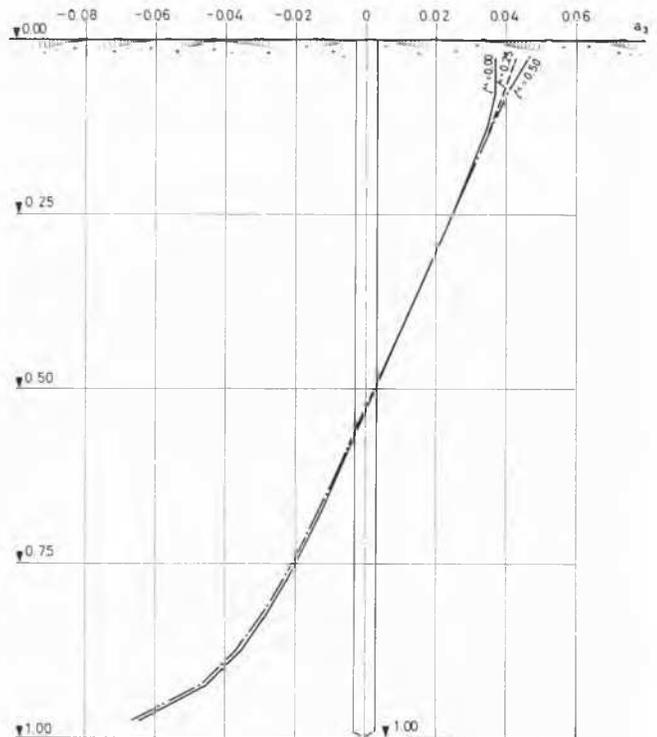


FIG. 4. Coefficient d'influence a_3 pour le calcul de la distribution des forces produites par le frottement négatif dans un pieu flottant.

TABLEAU III. VALEURS DE a_3

m	$\mu = 0$	$\mu = 0.25$	$\mu = 0.50$
1	0.03703	0.04167	0.04587
2	0.03845	0.03985	0.04093
3	0.03497	0.03556	0.03603
4	0.03084	0.03110	0.03126
5	0.02661	0.02664	0.02665
6	0.02232	0.02226	0.02212
7	0.01805	0.01784	0.01769
8	0.01375	0.01350	0.01328
9	0.00948	0.00911	0.00890
10	0.00518	0.00482	0.00452
11	0.00084	0.00041	0.00011
12	-0.00355	-0.00400	-0.00435
13	-0.00803	-0.00852	-0.00889
14	-0.01266	-0.01313	-0.01356
15	-0.01748	-0.01803	-0.01845
16	-0.02263	-0.02315	-0.02365
17	-0.02826	-0.02883	-0.02935
18	-0.03490	-0.03551	-0.03606
19	-0.04393	-0.04463	-0.04522
20	-0.06608	-0.06697	-0.06783

REMERCIEMENTS

Nous avons été aidés de la manière la plus efficace dans ce travail par Messrs. Martinez et Lorente de No Cabezas, Ingénieurs CC y P. Cette étude fait partie du programme de recherches conduites par le Laboratorio del Transporte y Mecánica del Suelo dont nous remercions le Directeur, M. José L. Escario pour nous avoir donné l'autorisation de publication. Les calculs avec ordinateur ont été effectués au Gabinete de Cálculo del Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas, dirigé par le second des auteurs de cette étude.

RÉFÉRENCES

- D'APPOLONIA, E. et J. P. ROMUALDI (1963). Load transfer in end-bearing steel H-piles. *Proc. American Society of Civil Engineers*, Vol. 89, SM2, p. 1.
- MINDLIN, R. D. (1936). Force at a point in the interior of a Semi-Infinite Solid. *Physics*, Vol. 7, p. 195.
- SALAS, J. A. J. et C. LORENTE DE NO CABEZAS (1965). Theoretical treatment of some cases of load distribution in piles. *Géotechnique* (en cours de publication).