

INTERNATIONAL SOCIETY FOR SOIL MECHANICS AND GEOTECHNICAL ENGINEERING



This paper was downloaded from the Online Library of the International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering (ISSMGE). The library is available here:

<https://www.issmge.org/publications/online-library>

This is an open-access database that archives thousands of papers published under the Auspices of the ISSMGE and maintained by the Innovation and Development Committee of ISSMGE.

Étude mécanique d'un milieu pulvérulent formé de sphères égales de compacité maxima

Mechanical study of a closely packed assembly of spheres with identical elastic properties

par P. DANTU, Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, 58, boulevard Lefèbvre, Paris (15^e)

Sommaire

On détermine, pour un champ de contraintes statistiques σ_{ij} , la valeur des réactions entre les sphères. On en déduit, en appliquant les formules de Hertz :

(a) la relation entre les contraintes statistiques et les déformations.

(b) La valeur des contraintes maxima dans les grains.

On étudie d'autre part, les conditions de l'équilibre limite (détermination de $\tan \phi$ en fonction de $\tan \psi$, coefficient de frottement des grains les uns par rapport aux autres).

Pour des valeurs élevées du coefficient de frottement, l'état limite correspond à des valeurs négatives de $\frac{\sigma_z}{\sigma_r}$. Dans ce cas, les cercles de Mohr correspondant à la rupture n'ont pas d'enveloppe.

Les résultats théoriques concernant les déformations sont comparés avec des résultats expérimentaux obtenus par mesures extensométriques directes sur des sables formés de billes de verre égales (à 10 pour cent près), ou inégales, et sur des sables de verre concassé.

I. But de l'étude

On ne possède, sur le problème de la relation entre les contraintes et les déformations dans les sables, que des données empiriques. Il paraît très difficile, sinon impossible, d'aborder théoriquement la question dans toute sa généralité. Le problème dépend en effet non seulement de la granulométrie, de la compacité et des coefficients E et ν de la matière des grains, mais aussi de la *forme* de ceux-ci. Il est évident en effet que la déformation dépend surtout des conditions de contact, et que celles-ci sont déterminées, pour chaque contact, par les courbures des surfaces des 2 corps.

Un problème liminaire se pose, qui est celui de la *définition géométrique* d'un milieu pulvérulent, c'est-à-dire d'un grand nombre de solides assemblés. La granulométrie et la compacité sont des éléments statistiques qui se sont tout de suite imposés, car faciles à concevoir et à mesurer, mais ils sont très loin de suffire à donner une connaissance de la géométrie de l'agrégat. Il faudrait trouver d'autres éléments statistiques, concernant notamment les contacts et les courbures, pour pénétrer plus loin dans la géométrie, et par conséquent dans la mécanique de ces milieux.

Nous nous sommes simplement proposé ici d'aborder le problème dans un cas particulièrement simple : celui de grains sphériques égaux assemblés avec la densité maxima. La régularité de l'agrégat permet facilement de calculer les réactions entre les grains, pour des contraintes statistiques données ; et l'application des formules de Hertz permet ensuite, connaissant les réactions, de calculer les déformations.

La comparaison avec l'expérience a été faite dans le cas

Summary

The value of reaction between adjacent spheres is determined for a statistical stress field. The author makes the following inferences, with the aid of Hertz's formulae : a relationship between strains and statistical stresses ; and the maximum value of stress within the particles.

He also investigates the conditions of limiting equilibrium and the coefficient of friction between the particles. For high values of this coefficient, the limiting condition corresponds to negative values of the ratio $\frac{\sigma_z}{\sigma_r}$. In that case, Mohr's circles corresponding to failure have no envelope.

The author compares theoretical calculations of strain with test results on sands composed of glass spheres of equal or unequal sizes, and upon sands consisting of crushed glass.

d'une pression hydrostatique, pour un sable formé de billes de verre approximativement égales.

D'autre part, nous avons déterminé théoriquement le $\tan \phi$ en fonction du coefficient de frottement $\tan \psi$ des sphères entre elles.

II. Structure de l'agrégat

On constate expérimentalement, et on a démontré théoriquement tout récemment que l'assemblage hexagonal de sphères égales (dit en "tas de boulets") correspond au maximum de compacité. Il n'est possible de concevoir des assemblages plus denses que localement, soit autour d'un point, soit autour d'une droite*.

Donnons quelques indications sur la géométrie du "tas de boulets", indications que nous utiliserons dans les chapitres suivants pour l'étude mécanique de l'agrégat.

La position de chaque sphère par rapport aux sphères voisines est la même pour toutes les sphères et se définit ainsi :

Chaque sphère est tangente à 12 sphères, et les points de contact sont les sommets d'un polyèdre formé de 8 triangles équilatéraux et 6 carrés, soit 24 arêtes de longueur R .

→ → →
Soient 1, 2, ..., 6 les vecteurs normaux unitaires aux points de contact indiqués sur la Fig. 1. Les vecteurs uni-

* A. H. BOERDIJK, Philips Research reports 7, pp. 303-313, août 1952

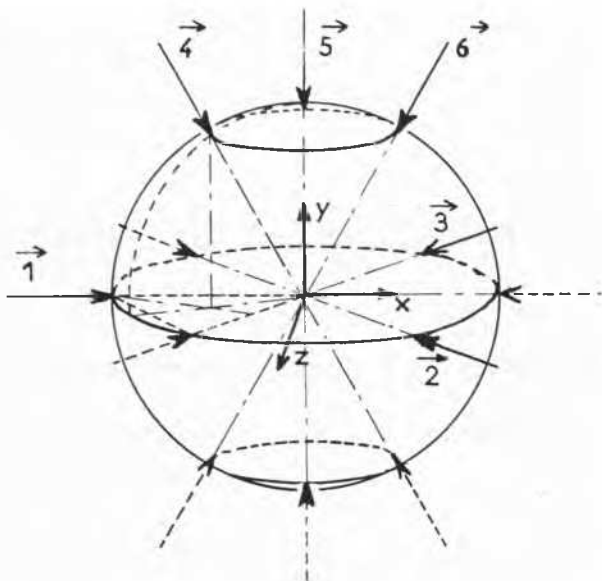


Fig. 1 Vecteurs unitaires normaux aux 12 points de contact.
Normal unit vectors at the 12 tangent points.

taires aux 6 autres points de contact sont évidemment $-\vec{1}$, $-\vec{2}$, ... Ces 6 directions sont celles des arêtes d'un tétraèdre régulier et leurs cosinus directeurs, avec les axes de la figure, sont les suivants :

	α	β	γ
$\vec{1}$	1	0	0
$\vec{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\vec{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\vec{4}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{\sqrt{3}}{6}$	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$
$\vec{5}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$
$\vec{6}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{\sqrt{3}}{6}$	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$

Nous aurons donc 6 directions de files de grains et ces directions se répartissent en couches planes de la manière suivante :

Couches planes hexagonales. — 4 plans d'assemblages hexagonaux, les plans $\vec{1} \vec{2} \vec{3}$, $\vec{3} \vec{4} \vec{5}$, $\vec{2} \vec{5} \vec{6}$, $\vec{4} \vec{6} \vec{1}$.

La distance d'une couche plane hexagonale à la suivante est $R \frac{\sqrt{6}}{3}$ (hauteur du tétraèdre régulier de côté $2R$).

Couches planes carrées. — 3 plans d'assemblages carrés, qui sont les suivants :

$$\vec{1} \vec{5}, \quad \vec{3} \vec{6}, \quad \vec{2} \vec{4}.$$

La distance d'une couche plane carrée à la suivante est $R\sqrt{2}$ (hauteur du demi-octaèdre régulier de côté $2R$).

Densité volumétrique. — On trouve très facilement les formules suivantes :

1° Nombre de sphères contenues dans un volume unité (en supposant les sphères petites par rapport à ce volume) :

$$N = \frac{\sqrt{2}}{8R^3}$$

2° Densité volumétrique (rapport du volume des sphères au volume total de l'agrégat) :

$$C = N \times \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\pi \sqrt{2}}{6} = 0.74$$

III. Calcul des réactions entre les grains

Considérons un assemblage indéfini de sphères égales rapporté aux mêmes taxes que précédemment. Supposons l'agrégat soumis à l'infini aux contraintes $\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}$.

Nous calculerons d'abord les réactions entre les grains dans l'hypothèse où il n'y a pas de frottement. Ensuite, nous examinerons le cas avec frottement dans le chapitre concernant l'équilibre limite.

En raison de la régularité de structure de l'agrégat nous pouvons supposer que les réactions sont les mêmes pour tous les grains. Pour chaque grain, les réactions sont égales deux à deux. Nous avons donc, dans le cas où il n'y a pas de frottement, 6 inconnues $F_1 F_2 F_3 \dots F_6$, correspondant à la valeur des réactions dans les 6 directions des files de grains.

Nous avons vu plus haut que 6 directions correspondaient aux arêtes du tétraèdre régulier et nous en avons donné les cosinus directeurs.

Calculons les 6 inconnues $F_1 F_2 \dots F_6$ en fonction des 6 composantes du tenseur des contraintes statistiques $\sigma_x \sigma_y \dots \tau_{zx}$. Pour cela considérons des sections de l'agrégat parallèles aux plans de coordonnées. La Fig. 2 montre l'aspect de ces sections. On a représenté seulement 3 couches horizontales successives de sphères, car le reste de l'agrégat se déduit de ces 3 couches par une translation verticale.

La situation des sections par rapport aux plans réticulaires des centres est indifférente pour notre calcul. Nous reviendrons sur ce point à la fin du chapitre.

Il est facile d'évaluer la résultante des contraintes dans un cercle quelconque de l'une de ces sections. Considérons par exemple le cercle C dans la section parallèle aux yz . Si l'on se reporte au croquis en plan qui donne la situation des contacts, on voit que la partie de la sphère située en arrière du cercle C (vers les x positifs) est soumise aux réactions F_1, F_2, F_3, F_4, F_6 . Avec les notations données plus haut concernant les vecteurs unitaires normaux on voit que la résultante des contraintes s'exerçant sur le cercle C est égale à :

$$-F_1 \cdot \vec{1} + F_2 \cdot \vec{2} + F_3 \cdot \vec{3} - F_4 \cdot \vec{4} + F_6 \cdot \vec{6}$$

Par un raisonnement analogue pour les autres sections, on trouve :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cercles de la couche} \\ \text{supérieure} \end{array} \right\} \begin{array}{l} -F_2 \cdot \vec{2} + F_3 \cdot \vec{3} - F_4 \cdot \vec{4} \\ + F_5 \cdot \vec{5} - F_6 \cdot \vec{6} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cercles de la couche} \\ \text{intermédiaire} \end{array} \right\} -F_2 \cdot \vec{2} + F_3 \cdot \vec{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cercles de la couche} \\ \text{inférieure} \end{array} \right\} -F_2 \cdot \vec{2} + F_3 \cdot \vec{3} + F_5 \cdot \vec{5}$$

Section parallèle aux $y z$

Cercles de la couche supérieure Cercles de la couche intermédiaire Cercles de la couche inférieure	$- F_1 \cdot \vec{1}$ pour les cercles C' et $- F_1 \cdot \vec{1} + F_2 \cdot \vec{2}$
	$+ F_3 \cdot \vec{3} - F_4 \cdot \vec{4} + F_6 \cdot \vec{6}$ pour les cercles C
	Pour tous les cercles : $F_4 \cdot \vec{4} + F_5 \cdot \vec{5} + F_6 \cdot \vec{6}$

Section parallèle aux $x y$

$$\frac{1}{4 R^2 \frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{8 R^2}. \text{ C'est donc le tiers, soit } \frac{\sqrt{6}}{24 R^2} \text{ pour les}$$

sphères de chacune des couches.

En faisant un calcul analogue pour les 2 autres sections et en égalisant les composantes $\sigma_x \sigma_y \dots \tau_{zx}$ des contraintes sur ces 3 sections unité avec la somme des contraintes dans les cercles, pour une surface unité, on aboutit aux formules suivantes, où les $\alpha \beta \gamma$ sont les cosinus directeurs des vecteurs unitaires.

On voit facilement que le nombre de sphères coupé par une surface unité parallèle aux $z x$ est égal à

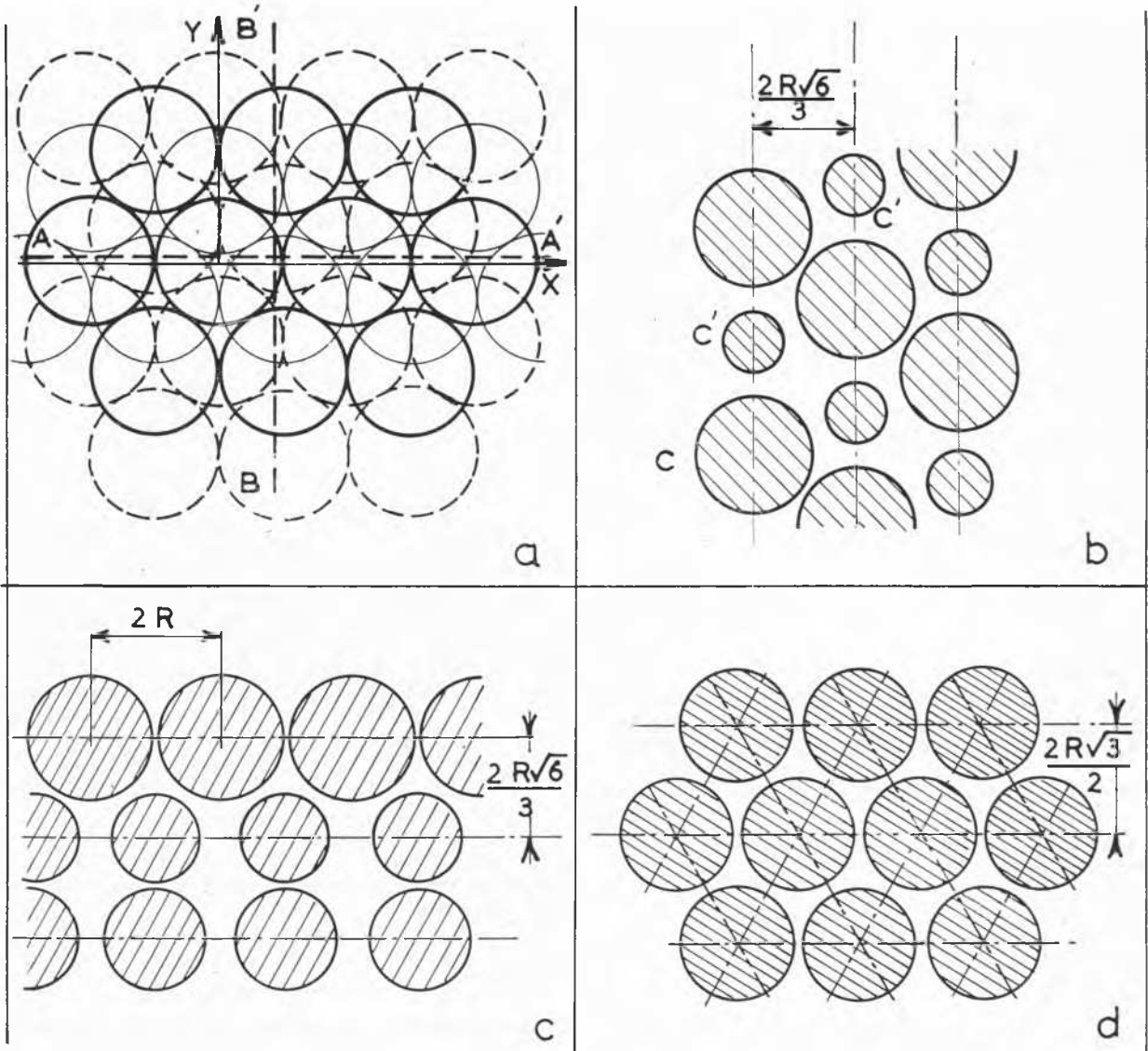


Fig. 2 a) Vue en plan de 3 couches superposées — couche supérieure : trait fort
 couche intermédiaire : trait fin
 couche inférieure : trait tireté

b) Coupe BB' parallèle au plan zy
 c) Coupe AA' parallèle au plan zx
 d) Coupe parallèle au plan xy .

a) Plan view of 3 surimposed layers — upper layer : pronounced line
 middle layer : thin line
 lower layer. : discontinuous line

b) BB' Section parallel to zy plane
 c) AA' Section parallel to zx plane
 d) Section parallel to xy plane.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\sqrt{2}}{8 R^2} (2 \alpha_1 F_1 - \alpha_2 F_2 - \alpha_3 F_3 + \alpha_4 F_4 - \alpha_6 F_6) \\ \sigma_y &= \frac{\sqrt{6}}{24 R^2} (3 \beta_2 F_2 - 3 \beta_3 F_3 + \beta_4 F_4 - 2 \beta_5 F_5 + \beta_6 F_6) \\ \sigma_z &= \frac{\sqrt{3}}{6 R^2} (-\gamma_4 F_4 - \gamma_5 F_5 - \gamma_6 F_6) \\ \tau_{xy} &= \frac{\sqrt{2}}{8 R^2} (-\gamma_2 F_2 - \gamma_3 F_3 + \gamma_4 F_4 - \gamma_6 F_6) \\ \tau_{yz} &= \frac{\sqrt{3}}{6 R^2} (-\beta_4 F_4 - \beta_5 F_5 - \beta_6 F_6) \\ \tau_{zx} &= \frac{\sqrt{3}}{6 R^2} (-\alpha_4 F_4 - \alpha_5 F_5 - \alpha_6 F_6)\end{aligned}$$

Soit en remplaçant les $\alpha\beta\gamma$ par leurs valeurs :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\sqrt{2}}{16 R^2} (4 F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_6) \\ \sigma_y &= \frac{\sqrt{2}}{16 R^2} \left(3 F_2 + 3 F_3 + \frac{F_4 + 4 F_5 + F_6}{3} \right) \\ \sigma_z &= \frac{\sqrt{2}}{16 R^2} \cdot \frac{8}{3} (F_4 + F_5 + F_6) \\ \tau_{xy} &= \frac{\sqrt{6}}{16 R^2} \left(F_3 - F_2 + \frac{F_4 - F_6}{3} \right) \\ \tau_{yz} &= \frac{1}{12 R^2} \left(-F_4 + \frac{F_5}{2} - F_6 \right) \\ \tau_{zx} &= \frac{\sqrt{3}}{12 R^2} (-F_4 + F_6)\end{aligned} \quad (1)$$

Cas particuliers

1° *Cisaillements nuls.* — Si les axes de coordonnées sont directions principales, on trouve facilement, soit en annulant les τ , soit par de simples considérations de symétrie que :

$$\begin{aligned}F_4 &= F_5 = F_6 \\ F_2 &= F_3\end{aligned}$$

Les inconnues se réduisent donc à 3 que nous appellerons $F G H$ (voir Fig. 3).

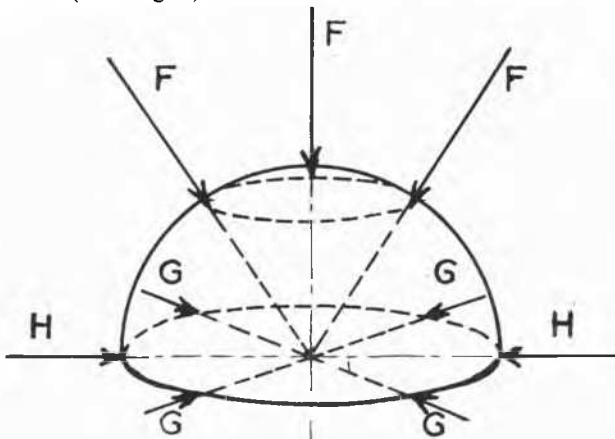


Fig. 3

Les équations (1) deviennent :

$$\begin{aligned}4 R^2 \sqrt{2} \sigma_x &= F + G + 2 H \\ 4 R^2 \sqrt{2} \sigma_y &= F + 3 G \\ R^2 \sqrt{2} \sigma_z &= F\end{aligned} \quad (2)$$

D'où :

$$\begin{aligned}F &= R^2 \sqrt{2} \sigma_z \\ G &= \frac{R^2 \sqrt{2}}{3} (4 \sigma_y - \sigma_z) \\ H &= \frac{R^2 \sqrt{2}}{3} (6 \sigma_x - \sigma_z - 2 \sigma_y)\end{aligned} \quad (3)$$

2° *Cisaillements nuls, et $\sigma_x = \sigma_y$.* — C'est le cas correspondant à l'appareil triaxial. Nous n'avons plus que 2 inconnues :

F (réactions obliques) et G (réactions horizontales), conformément à la Fig. 4, et l'on a :

$$\begin{aligned}4 R^2 \sqrt{2} \sigma_r &= F + 3 G \\ R^2 \sqrt{2} \sigma_z &= F\end{aligned}$$

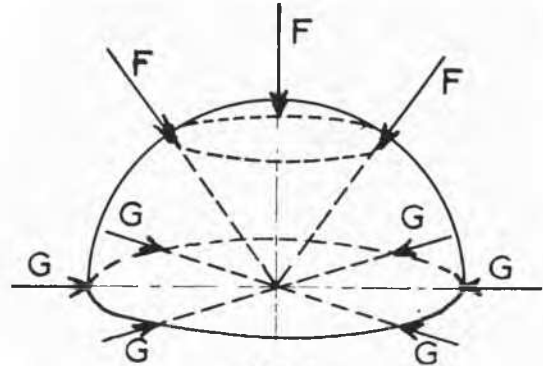


Fig. 4

Soit :

$$\begin{aligned}F &= R^2 \sqrt{2} \sigma_z \\ G &= \frac{R^2 \sqrt{2}}{3} (4 \sigma_r - \sigma_z)\end{aligned} \quad (4)$$

3° $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$

Les réactions sont toutes égales et il ne nous reste qu'une seule inconnue F

$$F = R^2 \sqrt{2} \sigma \quad (5)$$

IV. Relations entre les contraintes et les déformations

Nous avons, dans le chapitre précédent, calculé les réactions entre les grains connaissant les contraintes statistiques. Il suffit d'appliquer les formules de Hertz pour en déduire la déformation de chaque sphère et par conséquent la déformation d'ensemble du milieu.

Nous étudierons seulement 2 cas, le premier correspondant à la compression hydrostatique et le deuxième à la compression en usage dans l'appareil triaxial ($\sigma_z \neq \sigma_r$).

Premier cas

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \sigma \\ \tau_{xy} &= \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0\end{aligned}$$

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les réactions de contact sont toutes égales et que leur valeur F est donnée par la relation suivante :

$$F = R^2 \sqrt{2} \cdot \sigma$$

Chaque sphère est soumise à la pression F de 12 sphères voisines. Considérons pour plus de clarté le schéma à 2 dimensions représenté sur la Fig. 5. La variation de longueur $\Delta(OA)$ sera déterminée :

1° Par la déformation locale de la sphère résultant du contact en A et

2° Par la déformation en A résultant des contacts des autres sphères.

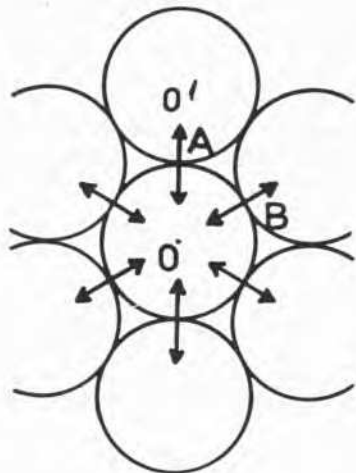


Fig. 5

Il convient de noter que le calcul de Hertz, précisé ultérieurement par Huber et Fuchs, montre, comme il est évident a priori, que, lorsqu'une sphère est pressée par une autre sphère, les déformations de la sphère en un point éloigné du point de contact sont du second ordre en comparaison de la déformation locale. On peut donc négliger l'influence en A des contacts tels que B .

On est par conséquent ramené à la déformation d'une file de grains, supposée isolée.

D'après Hertz, on a :

$$\Delta(OO') = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{16} \frac{F^2(K_1 + K_2)^2(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}}$$

R_1 et R_2 étant le rayon des sphères de centres O et O' , et :

$$K_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1}, \quad K_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2}$$

E_1 et ν_1 , E_2 et ν_2 étant les constantes élastiques des 2 sphères.

Nous avons ici :

$$R_1 = R_2 = R, \quad E_1 = E_2 = E, \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu \quad \text{et} \quad F = R^2 \sqrt{2} \cdot \sigma$$

Il vient en remplaçant :

$$\Delta(OO') = R \sqrt[3]{9(1 - \nu^2)^2 \frac{\sigma^2}{E^2}}$$

L'extension ϵ le long de la file de grains est donc égale à :

$$\epsilon = \frac{\Delta(OO')}{OO'} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{9(1 - \nu^2)^2 \frac{\sigma^2}{E^2}}$$

ν n'intervenant que par $(1 - \nu^2)^{2/3}$, on peut sans erreur notable, le supposer égal à 0,3. On a alors :

$$\epsilon = 0,98 \left(\frac{\sigma}{E}\right)^{2/3}, \quad \text{soit :}$$

$$\boxed{\epsilon \neq \left(\frac{\sigma}{E}\right)^{2/3}} \quad (6)$$

Deuxième cas :

Le cas de la pression hydrostatique est le seul qui puisse donner lieu à des comparaisons valables avec l'expérience car c'est le seul cas où l'on obtienne, au bout de quelques cycles de chargement, des déformations à peu près réversibles, et correspondant par conséquent à des déformations élastiques sans glissement relatif de grains.

Dès que les contraintes principales sont inégales on observe toujours dans les sables réels, et même dans les sables expérimentaux formés de billes de verre, des déformations irréversibles correspondant à des glissements. Nous donnerons cependant ici le résultat théorique correspondant à notre agrégat formé de sphères égales dans le cas où $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$ et $\tau_{xy} \neq \tau_{yz}$.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z \\ \tau_{xy} &= \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \end{aligned}$$

Les valeurs des réactions sont données par les formules (4) :

$$\begin{aligned} F &= R^2 \sqrt{2} \sigma_z \\ G &= \frac{R^2 \sqrt{2}}{3} (4 \sigma_r - \sigma_z) \end{aligned}$$

Les formules de Hertz donnent les déformations dans les directions correspondantes aux F et aux G .

Pour avoir le ϵ_z et le ϵ_r il nous faut considérer la déformation du tétraèdre élémentaire formé par 4 sphères assemblées de centres $ABCD$ (Fig. 6). Les réactions G correspondent aux 3 côtés horizontaux du tétraèdre et les réactions F aux 3 côtés obliques. Soit :

$$\epsilon' = \frac{\Delta(BC)}{BC} = \frac{\Delta(CD)}{CD} = \frac{\Delta(DB)}{DB}$$

$$\epsilon'' = \frac{\Delta(AB)}{AB} = \frac{\Delta(AC)}{AC} = \frac{\Delta(AD)}{AD}$$

On a, bien entendu :

$$\epsilon_r = \epsilon''$$

Pour connaître ϵ_z , il faut connaître le déplacement vertical de A :

$$\epsilon_z = \frac{\Delta(AH)}{AH}$$

ϵ_r mesure le rapprochement relatif des centres des sphères d'une même couche horizontale et ϵ_z celui de 2 couches horizontales successives.

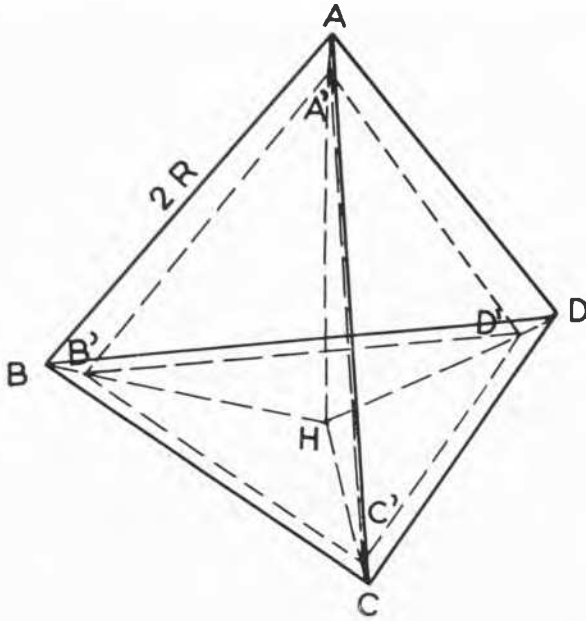


Fig. 6

La détermination de ε_z résulte d'un calcul élémentaire de géométrie différentielle. On trouve sans difficulté :

$$\frac{\Delta(AH)}{AH} = \frac{1}{2} \left(3 \frac{\Delta(AB)}{AB} - \frac{\Delta(BH)}{BH} \right)$$

Or
$$\frac{\Delta(BH)}{BH} = \varepsilon''$$

D'où :

$$\varepsilon_z = \frac{3\varepsilon'' - \varepsilon'}{2}$$

Les formules de Hertz donnent pour ε' et ε'' , en supposant comme dans le cas précédent $\nu = 0.3$

$$\varepsilon' = \frac{1}{2R} \sqrt[3]{\frac{9}{4} F \frac{(1-\nu^2)^2}{E^2}} \frac{1}{R} \neq \left(\frac{\sigma_z}{E} \right)^{2/3}$$

$$\varepsilon'' = \frac{1}{2R} \sqrt[3]{\frac{9}{4} G \frac{1-\nu^2}{E^2}} \frac{1}{R} \neq \left(\frac{4\sigma_r - \sigma_z}{3} \right)^{2/3}$$

D'où :

$$\varepsilon_r \neq \left(\frac{4\sigma_r - \sigma_z}{3} \right)^{2/3}$$

$$\varepsilon_z \neq \frac{1}{2} \left[3 \left(\frac{4\sigma_r - \sigma_z}{3} \right)^{2/3} - \left(\frac{\sigma_z}{E} \right)^{2/3} \right]$$

Contraintes maxima dans les grains

Hertz donne la contrainte maxima de compression au contact de 2 corps :

$$q = \frac{3}{2} \frac{F}{\pi a^2}$$

avec

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} \frac{F(K_1 + K_2)R_1R_2}{R_1 + R_2}}$$

Soit pour $R_1 = R_2 = R$, $E_1 = E_2 = E$, $\nu = 0.3$:

$$q_{\max} = 0.39 \sqrt[3]{\frac{4FE^2}{R^2}}$$

Limitons-nous au cas de la contrainte moyenne hydrostatique σ . On a $F = R^2\sqrt{2} \cdot \sigma$, d'où :

$$q_{\max} = 0.39 \sqrt[3]{4\sqrt{2}} \sqrt[3]{\sigma E^2} = 0.695 \sqrt[3]{\sigma E^2}$$

On voit donc que pour une valeur donnée de σ la contrainte maxima dans les grains de notre sable théorique est indépendante du rayon des grains, mais qu'elle dépend du module d'Young de ceux-ci.

V. Calcul de $\text{tg } \varphi$

1° *Sans frottement.* — Reprenons les équations (3) qui donnent les réactions entre les grains dans le cas où $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_r$.

$$F = R^2 \sqrt{2} \sigma_z$$

$$G = \frac{R^2 \sqrt{2}}{3} (4\sigma_r - \sigma_z)$$

La valeur des réactions étant nécessairement positive, on doit donc avoir :

$$4\sigma_r - \sigma_z \geq 0$$

$$\sigma_z \leq 4\sigma_r$$

Il y aura donc rupture de l'équilibre et écrasement de l'agrégat pour :

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_r} = 4$$

ce qui correspond à $\varphi = 36^\circ 52'$, et $\text{tg } \varphi = 0.750$

Nous verrons plus loin, en retrouvant ces résultats par une méthode d'énergie, quel est le mécanisme de rupture de l'agrégat.

2° *Avec frottement.* — Soit $\text{tg } \psi$ le coefficient de frottement des sphères les unes sur les autres et considérons l'équilibre limite. Les réactions appliquées à chacune des sphères, toujours dans le cas où $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_r$, sont indiquées sur la Fig. 4. Pour calculer F et G en fonction de σ_z et σ_r dans le cas de frottement il faut reprendre nos équations d'équilibre en introduisant la composante du frottement.

Soient $\vec{4}'$, $\vec{5}'$, et $\vec{6}'$ les vecteurs unitaires tangents à la sphère aux points d'application des réactions F .

Leurs cosinus directeurs sont : (voir Fig. 7).

	α	β	γ
$\vec{4}'$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\vec{5}'$	0	$+\frac{\sqrt{6}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\vec{6}'$	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

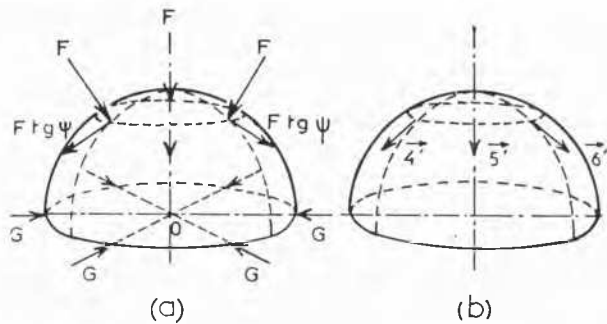


Fig. 7 Réactions dans l'état limite.
Vecteurs unitaires correspondants aux composantes tangentielles de frottement.
Reactions in limit state.
Unit vectors corresponding to tangential components of friction.

Si nous reprenons la considération du chapitre III concernant les relations entre réactions et contraintes, on trouve :

$$\sigma_z = -\frac{\sqrt{3}}{6R^2} [F(\gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6) + \text{tg } \psi \cdot F(\gamma'_4 + \gamma'_5 + \gamma'_6)]$$

$$\sigma_r = \frac{\sqrt{2}}{8R^2} [G(2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) + F(\alpha_4 - \alpha_6) + \text{tg } \psi \cdot F(\alpha'_4 - \alpha'_6)]$$

ou en remplaçant les cosinus par leur valeur :

$$\sigma_z = \frac{\sqrt{2}}{2R^2} F(1 + \sqrt{2}) \text{tg } \psi$$

$$\sigma_r = \frac{\sqrt{2}}{8R^2} [3G + F(1 - \sqrt{2}) \text{tg } \psi]$$

D'où :

$$F = \frac{2R^2}{\sqrt{2} + \text{tg } \psi} \sigma_z$$

$$G = \frac{8R^2\sqrt{2}}{6} \left[\sigma_r - \sigma_z \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{1 - \sqrt{2} \text{tg } \psi}{\sqrt{2} + \text{tg } \psi} \right]$$

L'équilibre limite correspond, comme nous l'avons vu, à $G = 0$, d'où :

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_r} = 4 \frac{\sqrt{2} + \text{tg } \psi}{\sqrt{2} - 2 \text{tg } \psi}$$

D'où :

$$\sin \varphi = \frac{\sigma_z - \sigma_r}{\sigma_z + \sigma_r} = 3 \frac{\sqrt{2} + 2 \text{tg } \psi}{5\sqrt{2} + 2 \text{tg } \psi}$$

La courbe représentative de $\text{tg } \varphi$ en fonction de $\text{tg } \psi$ est tracée sur la Fig. 8.

Pour $\text{tg } \psi = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7$, $\text{tg } \varphi$ est infini.

Pour $\text{tg } \psi > \frac{\sqrt{2}}{2}$ la valeur critique de $\frac{\sigma_z}{\sigma_r}$ est négative.

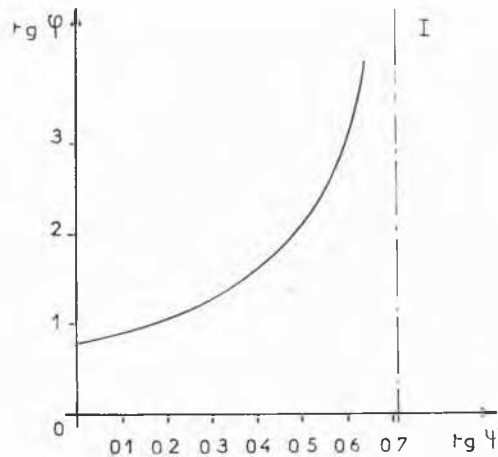


Fig. 8 Courbe théorique de $\text{tg } \varphi$ en fonction du coefficient de frottement $\text{tg } \psi$.
Theoretical curve of $\tan \varphi$ versus the coefficient of friction, $\tan \psi$.

Nous avons donc le cas curieux d'un milieu où les cercles de Mohr correspondant à la rupture n'admettent pas d'enveloppe. Il n'y a pas de courbe intrinsèque (voir Fig. 9).

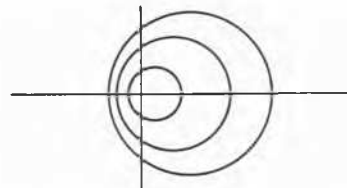


Fig. 9 Cercles de Mohr de rupture pour une valeur du coefficient de frottement supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Failure Mohr's circles for a value of the coefficient of friction greater than $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Autrement dit, pour des valeurs élevées du coefficient de frottement un tas de boulets à parois verticales peut se maintenir à la manière d'un mur de pierres sèches*.

L'explication de ce paradoxe est très simple : quand $\text{tg } \psi$ atteint une valeur suffisamment élevée, il est possible que les réactions entre les sphères soient verticales (il suffit que ψ soit supérieur ou égal à l'inclinaison de la normale au point de contact par rapport à la verticale). On comprend donc que l'agrégat puisse supporter une charge verticale σ_z en l'absence de compressions horizontales (Fig. 10).

On retrouve facilement les formules précédentes en appliquant une méthode d'énergie. Nous ne donnerons pas le détail de ce calcul puisqu'il n'apporte pas de résultats nouveaux, mais nous en donnerons le principe, car il permet de mieux comprendre le mécanisme de rupture de l'agrégat.

Dans l'équilibre limite, comme nous l'avons vu, les réactions horizontales sont nulles. Si σ_z augmente légèrement, σ_r restant constant, il y aura donc écartement des sphères des couches horizontales hexagonales et par conséquent rapprochement de ces couches les unes par rapport aux autres, conformément au schéma à 2 dimensions de la Fig. 11.

* Notre collègue DAVIN, à qui nous avons montré notre manuscrit, nous a dit qu'il y a 10 ans, il avait fait une étude du $\text{tg } \varphi$ d'un agrégat à 2 dimensions formé d'un assemblage hexagonal de cylindres circulaires égaux, et qu'il avait constaté également l'existence d'une cohésion pour des valeurs très élevées du coefficient de frottement. Son étude n'avait pas été publiée.

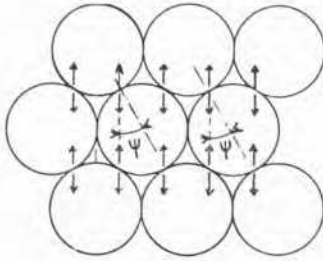


Fig. 10

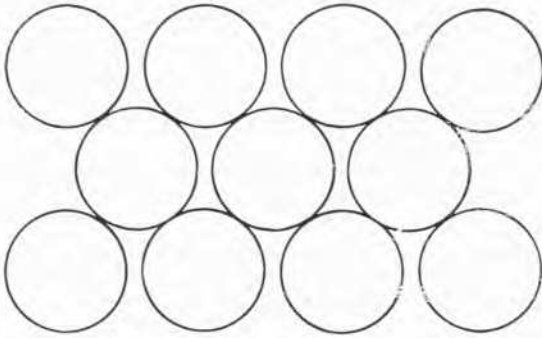


Fig. 11

Il est facile d'établir, par un raisonnement de géométrie différentielle, la relation entre la valeur de l'écartement des sphères d'une couche hexagonale et celle du rapprochement de 2 couches successives. Il suffit pour cela de considérer la déformation du tétraèdre élémentaire dont les sommets sont les centres de 4 sphères tangentes, et dont les 3 arêtes obliques restent égales à $2R$ au cours de cette déformation. Cette analyse donne également la valeur du glissement relatif des grains.

A partir de ces données, on calcule le travail des forces extérieures et celui du frottement. En exprimant que le travail total est nul, on retrouve les formules données précédemment pour l'équilibre limite.

3° Calcul de $\text{tg } \varphi$ pour une autre direction des contraintes principales. — Il nous a paru intéressant de faire le calcul dans une autre direction des contraintes principales pour bien mettre en évidence l'influence de l'anisotropie.

Nous avons pris le cas où la contrainte principale au lieu d'être perpendiculaire à une couche plane hexagonale, était

perpendiculaire à une couche plane carrée (voir définition de ces couches carrées au chapitre II).

Par un calcul analogue aux précédents, on trouve que la

valeur critique de $\frac{\sigma_z}{\sigma_r}$ est :

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_r} = 2 \frac{1 + \text{tg } \psi}{1 - \text{sg } \psi}$$

résultat que l'on retrouve aisément par la méthode de l'énergie. On en déduit facilement $\text{tg } \varphi$ qui devient infini pour $\text{tg } \psi = 1$.

En résumé :

(a) $\text{tg } \varphi$ est différent de zéro lorsque le coefficient de frottement est nul ;

(b) La loi de $\text{tg } \varphi$ en fonction de $\text{tg } \psi$ n'est nullement linéaire ;

(c) Cette loi dépend de l'orientation de σ_z par rapport aux plans réticulaires de l'agrégat ;

(d) Quand le coefficient de frottement dépasse une certaine limite, il n'y a plus de $\text{tg } \varphi$ (les cercles de Mohr de rupture n'admettent pas d'enveloppe).

La relation entre $\text{tg } \varphi$ et $\text{tg } \psi$ est tout à fait différente de la loi démontrée par Caquot :

$$\text{tg } \varphi = \frac{\pi}{2} \text{tg } \psi$$

mais cette dernière loi est valable pour des sables isotropes et la différence entre les 2 lois montre bien l'influence considérable de l'anisotropie dans les problèmes d'équilibre limite, et explique les écarts que l'on a parfois constatés entre la loi de Caquot et les lois expérimentales (il existe toujours une certaine anisotropie dans les sables réels, due en particulier au mode de tassement).

VI. Résultats expérimentaux concernant la relation entre les contraintes et les déformations

Il semble, d'après les expériences qui ont été publiées, que lorsqu'on soumet à une compression hydrostatique un sable enfermé dans une gaine de caoutchouc et que l'on détermine

les déformations par l'intermédiaire de $\frac{\Delta v}{v}$ (mesuré par

variation du volume des vides), le phénomène devient à peu près réversible au bout de quelques cycles, mais que la loi de déformation est loin d'être linéaire.

Le principe de la mesure de $\frac{\Delta l}{l}$ par l'intermédiaire de $\frac{\Delta v}{v}$ nous a paru critiquable car, d'une part on n'atteint ainsi

qu'une moyenne et d'autre part la déformation superficielle de la membrane (qui tend à épouser la surface des grains) est une source d'erreurs non négligeable, du moins quand les grains ne sont pas très petits.

Aussi avons-nous fait une mesure directe de $\frac{\Delta l}{l}$. Il s'agissait

de mesurer la variation de longueur entre 2 points situés à la surface de l'agrégat. Naturellement, ces 2 points ne pouvaient être pris sur la surface extérieure de la membrane en caoutchouc qui enferme le sable, car celle-ci se déforme. Il était nécessaire de prendre 2 points de l'agrégat lui-même. Pour cela la membrane était découpée selon 2 petits cercles de 5 mm de diamètre et la continuité de la membrane était assurée par des morceaux de clinquant d'aluminium de 5/100 de mm d'épaisseur collés sur la surface intérieure de la membrane. Le dispositif représenté sur la Fig. 12 permet de mesurer la déformation. Le sable était contenu dans une membrane en caoutchouc de 155 mm de longueur et de 50 mm de diamètre. Il était formé de billes de verre de 1 mm de diamètre. Ces billes ne sont pas parfaitement sphériques, et leur diamètre varie de ± 10 pour cent d'une bille à l'autre. On est donc loin du cas théorique. On s'en serait rapproché beaucoup plus avec des billes d'acier, mais les déformations, déjà difficiles à mesurer avec les billes de verre, auraient été plus petites encore avec des billes d'acier, et l'erreur relative sur les mesures aurait été trop grande.

Les résultats sont les suivants :

1° La dispersion des mesures pour 4 essais est faible (de l'ordre de 10 pour cent).

2° La comparaison du résultat des mesures avec celles obtenues par le $\frac{\Delta v}{v}$ montre des différences très importantes.

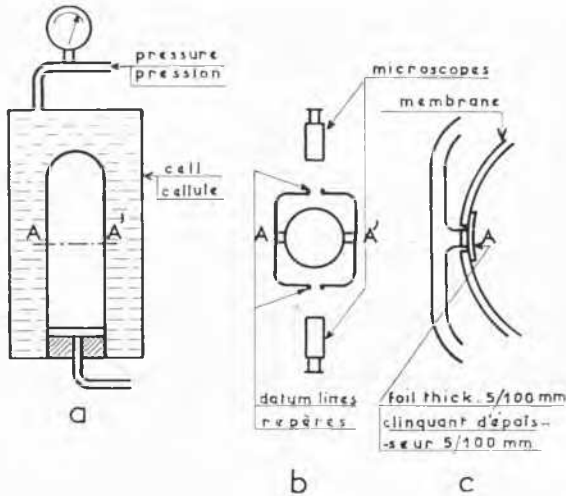


Fig. 12 Schéma du dispositif de mesure de $\Delta(AA')$.
 a) b) Coupe verticale et horizontale de l'éprouvette.
 c) Détail.
 Schematic diagram of $\Delta(AA')$ measurement device.
 a) b) Vertical and horizontal section of the test piece.
 c) Detail.

$$\left(\text{Le } \frac{\Delta l}{l} \text{ mesuré est égal seulement à 27 pour cent de } \frac{1}{3} \frac{\Delta v}{v} \right).$$

Cet écart diminue beaucoup quand on opère sur un sable fin, comme cela se comprend facilement puisque l'erreur provenant de la déformation superficielle de la membrane diminue quand les grains sont petits.

3° L'allure des courbes de déformation lorsque σ varie de 1 à 10 kg/cm² (voir Fig. 13), est la même que celle des courbes déjà publiées. Elle s'explique bien par les déformations non linéaires de Hertz et notre formule théorique

$$\left[\frac{\Delta l}{l} \neq \left(\frac{\sigma}{E} \right)^{2/3} \right] \text{ rend bien compte de l'allure de la courbe ;}$$

4° Par contre les valeurs des déformations sont largement supérieures aux valeurs théoriques. Les chiffres suivants correspondent à $\sigma = 10 \text{ kg/cm}^2$, et sont les moyennes de 4 essais, et chacun d'eux a été fait après 24 cycles de charge entre 1 et 10 kg/cm².

$\frac{\Delta l}{l}$ mesuré	$\frac{1}{3} \frac{\Delta v}{v}$	$\frac{\Delta l}{l} = \left(\frac{\sigma}{E} \right)^{2/3}$ théorique
1.0×10^{-3}	3.75×10^{-3}	0.44×10^{-3}

5° Une autre mesure avait été faite dans les mêmes conditions expérimentales, avec un sable formé de grains de verre "Pyrex", obtenu par broyage et tamisage (dimensions des grains 0.5 à 1 mm). Pour éviter que les grains trop coupants ne percent la membrane, ces grains avaient été usés en les faisant tourner avec de la poudre d'émeri, qui était ensuite séparée des grains de verre par tamisage. Cette opération avait pour résultat d'émousser légèrement les angles.

Pour une valeur de σ égale à 10 kg/cm² on trouvait un $\frac{\Delta l}{l}$ égal à 1.65×10^{-3} , soit 65 pour cent supérieure à la valeur trouvée pour le sable de grains sphériques.

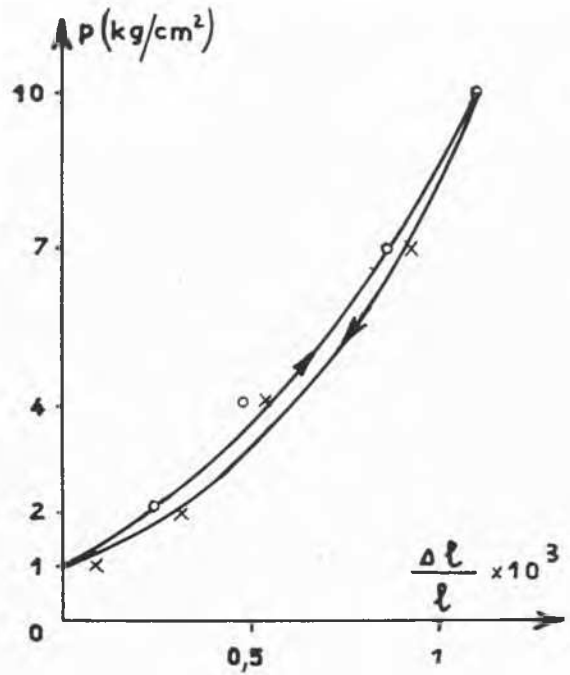


Fig. 13 Courbe contrainte-déformation (billes de verre de 1 mm de diamètre pour un cycle de 1-10 kg/cm².
 Stress-strain curve (1 mm diameter glass balls) for one 1-10 kg/cm² cycle.

Raisons de l'écart entre la théorie et l'expérience

Dans la théorie, nous avons supposé les sphères rigoureusement égales et assemblées suivant une structure régulière. Il en résultait, dans le cas d'une pression hydrostatique (qui est le cas qui nous intéresse ici), que les réactions étaient toutes égales, d'où la possibilité de calcul de ces réactions et des déformations de Hertz correspondantes.

Le calcul des déformations de Hertz a été fait avec une seule simplification qui est la suivante :

Nous avons tenu compte (page 65) pour le calcul des déformations selon une file de grains, par exemple parallèle à l'axe des x , uniquement des déformations de contact provenant des réactions s'exerçant entre les grains de cette file et nous avons négligé, comme du second ordre, l'effet des réactions telles que R (Fig. 14) sur la déformation de la file horizontale. Remarquons que des réactions telles que R ont pour effet un

$\frac{\Delta l}{l}$ positif dans la file horizontale et par conséquent, si l'on avait tenu compte de cet effet secondaire, on aurait introduit un terme rectificatif qui aurait diminué en valeur absolue la

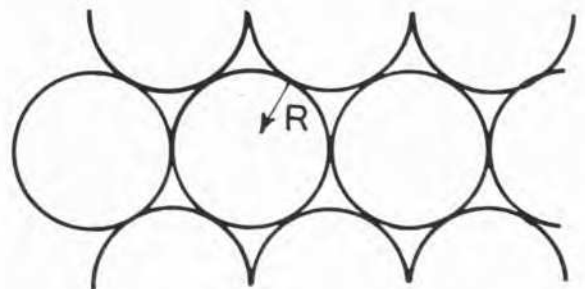


Fig. 14

valeur de $\frac{\Delta l}{l}$. Donc cela ne peut en aucune manière expliquer l'écart avec la théorie puisque l'expérience donne pour $\frac{\Delta l}{l}$

des résultats très supérieurs à ceux de la théorie.

Il faut, à notre avis, rechercher les raisons de cet écart dans la structure interne de la répartition des réactions entre les grains, structure qui est entièrement différente de la structure régulière dès que les grains sphériques ne sont pas strictement égaux. Nos essais de visualisation par la photoélasticité* ont nettement montré que les contraintes se transmettaient selon des chaînons de grains, et que les grains extérieurs à ces chaînons (et qui sont de beaucoup les plus nombreux) sont à peine contraints.

Par conséquent, les réactions F entre les grains ne se répartissent nullement autour d'une valeur moyenne donnée par la théorie, selon une loi de probabilité, du genre de celle du croquis (a) de la Fig. 15. La répartition serait plutôt conforme au schéma du croquis (b), c'est-à-dire une grande "population" de réactions inférieures à la moyenne et une "population" plus petite de réactions très supérieures à la moyenne; ces 2 croquis n'ayant, bien entendu, qu'une valeur de simple indication.

Dans ces conditions, les déformations d'ensemble étant déterminées par un "squelette" de chaînons de grains forte-

ment contraints, on comprend aisément que la loi de déformation en fonction des contraintes corresponde à des valeurs très supérieures à la valeur théorique.

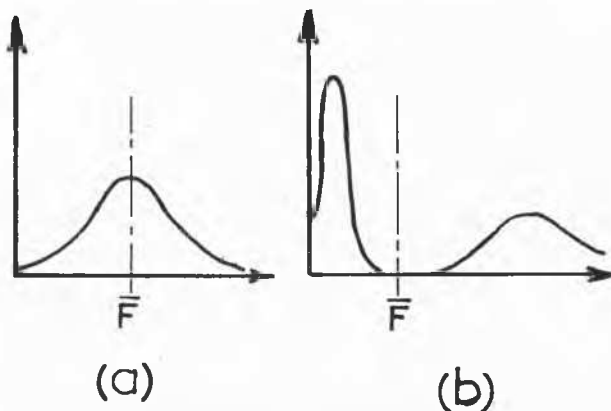


Fig. 15

Alors qu'en général, les théoriciens qui font des expériences trouvent toujours une "concordance très satisfaisante entre le calcul et la réalité", nous trouvons une discordance importante mais qui nous paraît non moins satisfaisante, car elle permet de mieux comprendre ce qui se passe à l'intérieur d'un sable.

* V. DANTU, Proceedings du IV^e Congrès de Mécanique des Sols.