

# INTERNATIONAL SOCIETY FOR SOIL MECHANICS AND GEOTECHNICAL ENGINEERING



*This paper was downloaded from the Online Library of the International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering (ISSMGE). The library is available here:*

<https://www.issmge.org/publications/online-library>

*This is an open-access database that archives thousands of papers published under the Auspices of the ISSMGE and maintained by the Innovation and Development Committee of ISSMGE.*

# Tassements produits par la consolidation d'une couche d'argile de grande épaisseur

## Settlements Due to Consolidation of a Deep Stratum of Clay.

par J. MANDEL, Docteur ès Sciences, Professeur à l'Ecole Polytechnique (Paris)

### Sommaire

L'auteur complète les résultats de sa communication au congrès de Londres relative à la consolidation d'une couche d'argile de grande épaisseur surmontée d'une couche drainante, en donnant différents abaques qui n'avaient pu être calculés en 1957 (degré de consolidation, soit pour une charge ponctuelle, soit sous une fondation circulaire, lorsque les modules d'élasticité des deux couches sont différents).

Dans notre communication 3a/21 au 4<sup>e</sup> congrès international de mécanique des sols (pages 360 à 363), nous avons indiqué la solution théorique du problème de la consolidation d'une couche d'argile de grande épaisseur recouverte par une couche perméable de compressibilité différente.  $M$  désignant le rapport  $\mu_1/\mu_2$  des modules de cisaillement de la couche supérieure et de l'argile, nous avons donné les abaques suivants :

Tassement initial et tassement final produits aux différents points de la surface par une force concentrée appliquée à la surface (pour les différentes valeurs de  $M$ ).

Tassement initial et tassement final au centre d'un pilier circulaire (pour les différentes valeurs de  $M$ ).

Degré de consolidation en fonction du temps, aux différents points de la surface, dans le cas de la force concentrée : 1<sup>o</sup> lorsque  $M = 1$ , 2<sup>o</sup> lorsque  $M$  est très grand.

Pour compléter ces résultats, il restait à calculer le degré de consolidation pour d'autres valeurs de  $M$ , et tant dans le cas de la force concentrée que dans le cas du pilier circulaire. C'est l'objet de la présente communication.

### Notations

- $\mu$  : module de cisaillement ;
- $\nu$  : nombre de Poisson ;
- $c$  : coefficient de consolidation de l'argile ;
- $h$  : épaisseur de la couche perméable ;
- $\zeta$  : tassement (déplacement vertical) ;
- $t$  : temps écoulé depuis l'application de la charge  $P$ .

L'indice 1 est relatif à la couche perméable, l'indice 2 à la couche d'argile.

Les formules de notre communication au 4<sup>e</sup> congrès (Londres) sont désignées par leur numéro dans cette communication, affecté de l'indice  $L$ .

### Bases du calcul

(a) *Force concentrée* (Fig. 1)— La force  $P$  étant appliquée à l'instant 0, le tassement produit à l'instant  $t$ , à la distance  $r$  du point d'application de la force, est donné par la formule :

$$\zeta = \zeta_{\infty} - \frac{P(1 - 2\nu_2)}{4\pi\mu_2} \int_0^{\infty} K(mh) f(mh, m\sqrt{ct}) J_0(mr) dm \quad (17_L)$$

### Summary

The author completes the results of his paper presented at the London Congress relating to the consolidation of a deep stratum of clay covered by a draining layer. He gives several graphs which could not be calculated in 1957, namely, degree of consolidation for a point load as well as for a circular foundation, when the elastic moduli of the two layers are different.

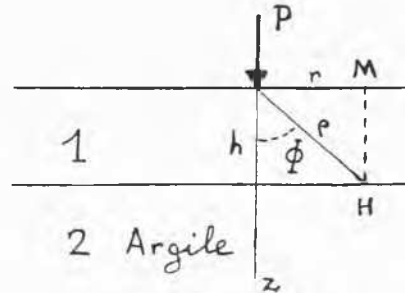


Fig. 1

Le degré de consolidation  $U$ , à la distance  $r$  et au temps  $t$ , est donc :

$$U = \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta_{\infty} - \zeta_0} = \frac{\int_0^{\infty} K(mh) [1 - f(mh, m\sqrt{ct})] J_0(mr) dm}{\int_0^{\infty} K(mh) J_0(mr) dm}$$

$J_0$  désigne la fonction de Bessel d'ordre 0,  $K(x)$  la fonction :

$$K(x) = \left[ \delta(x, \nu_2) - \delta\left(x, \frac{1}{2}\right) \right] \frac{2\mu_2(1 - \nu_1)}{\mu_1(1 - 2\nu_2)}$$

où  $\delta(x)$  est donné par la formule (6-L).

$f(mh, m\sqrt{ct})$ , défini par la formule (18-L), a une expression très compliquée lorsque  $\nu_2$  est différent de 0,5. Lorsque  $\nu_2 = 0,5$  la formule (18-L), où  $p$  devient infini, se simplifie. Par un passage à la limite on obtient une expression qui ne dépend plus de  $mh$  ;

$$f = \frac{2}{\sqrt{\pi}} [(1 + 2x^2) \int_0^{\infty} e^{-u^2} du - xe^{-x^2}] \quad \text{où : } x = m\sqrt{ct}$$

L'expression de  $K(x)$  se simplifie aussi et devient :

$$K(x) = [g(x)]^2$$

où :

$$g(x) = \frac{4(1 - \nu_1)}{M + 1} \frac{e^x - N_1(1 - 2x)e^{-x}}{e^{2x} - (N_1 + N_2 + 4N_1x^2) + N_1N_2e^{-2x}}$$

$$N_1 = \frac{M - 1}{M + 3 - 4\nu_1} \quad N_2 = \frac{M - (3 - 4\nu_1)}{M + 1}$$

Ces simplifications nous conduisent à faire le calcul de  $U$  pour  $\nu_2 = 0,5$ , bien que pour cette valeur le tassement différé soit nul. Pour étendre les résultats obtenus aux autres

valeurs de  $\nu_2$ , nous admettrons que, lorsque  $\frac{\sqrt{ct}}{1-\nu_2}$  garde la

même valeur,  $U$  garde la même valeur. Ceci est démontré dans notre communication au 4<sup>e</sup> congrès, pour les valeurs élevées de  $M$  et ceci est vrai également pour  $M = 1$  lorsque  $U$  est voisin de 1 (voir Fig. 7-1). Dans les conditions les plus défavorables ( $M = 1$ , faibles valeurs de  $U$ ) le temps nécessaire pour atteindre un degré de consolidation donné est multiplié par 1,18 pour  $\nu_2 = 0,25$  si l'on se base sur les résultats relatifs à  $\nu_2 = 0,5$  en égalant les valeurs de  $\sqrt{ct}$  :  $1 - \nu_2$ .

En posant :  $m\rho = u$  d'où :  $mr = u \sin \Phi$ ,  $mh = u \cos \Phi$  et  $\lambda = \frac{\sqrt{ct}}{\rho}$  ( $\rho$ ,  $\Phi$  sont définis sur la Fig. 1), on obtient pour  $\nu_2 = 0,5$  :

$$1 - U = \frac{I(M, \Phi, \lambda)}{I(M, \Phi, 0)}$$

où :

$$I(M, \Phi, \lambda) = \int_0^\infty [g(u \cos \Phi)]^2 f(\lambda u) J_0(u \sin \Phi) du$$

$U$  dépend donc des 3 variables  $M$ ,  $\Phi$ ,  $\lambda$  (et en outre de  $\nu_1$  pour lequel nous prendrons la valeur 0,25).

(b) *Tassement au centre d'un pilier circulaire* (Fig. 2)—En supposant la pression  $q$  verticale et uniformément répar-

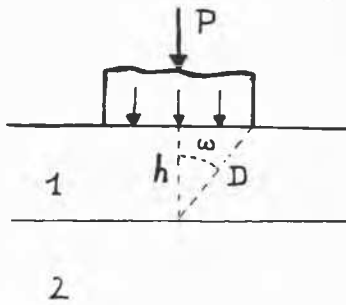


Fig. 2

tie, on déduit de la formule (17-1) pour le déplacement  $\zeta$  au centre du pilier (par intégration dans l'aire du cercle de base) :

$$\begin{aligned} \zeta_\infty - \zeta &= \frac{q(1-2\nu_2)}{2\mu_2} \int_0^\infty K(mh) f(mh, m\sqrt{ct}) dm \int_0^\infty J_0(mr) r dr \\ &= \frac{P(1-2\nu_2)}{2\pi\mu_2} \int_0^\infty K(mh) f(mh, m\sqrt{ct}) \frac{J_1(mR)}{mR} dm \end{aligned}$$

En posant :  $mD = u$  d'où  $mR = u \sin \omega$ ,  $mh = u \cos \omega$

et  $\lambda = \frac{\sqrt{ct}}{D}$  ( $D$ ,  $\omega$  sont définis sur la Fig. 2), on obtient pour  $\nu_2 = 0,5$  :

$$1 - U = \frac{J(M, \omega, \lambda)}{J(M, \omega, 0)}$$

où :

$$J(M, \omega, \lambda) = \int_0^\infty [g(u \cos \omega)]^2 f(\lambda u) \frac{J_1(u \sin \omega)}{u \sin \omega} du$$

## Présentation des résultats

Toutes les courbes ont été calculées pour  $\nu_1 = 0,25$ .

(a) *Force concentrée*—La figure 3 donne le degré de consolidation  $U$  en fonction de  $\Phi$ ,  $\lambda = \frac{1}{2(1-\nu_2)} \frac{\sqrt{ct}}{\rho}$  et  $M$ .  $\Phi$  est

porté en abscisses,  $U$  en ordonnées. Pour  $\Phi = \frac{\pi}{2}$ ,  $U$  est indé-

pendant de  $M$ . Il en résulte que les courbes  $\Phi$ ,  $U$ , correspondant à une même valeur de  $\lambda$  et aux différentes valeurs de  $M$  forment un faisceau dont le sommet se trouve sur la verticale  $\Phi = 100$  grades. La valeur de  $\lambda$  a été marquée à droite de ce sommet (bord droit de la figure). La valeur de  $M$  se lit sur chacune des courbes. On a tracé sur la Fig. 3 5 courbes qui permettent les interpolations pour  $\lambda$  compris entre 0 et 8 et  $M$  entre 1 et 20.

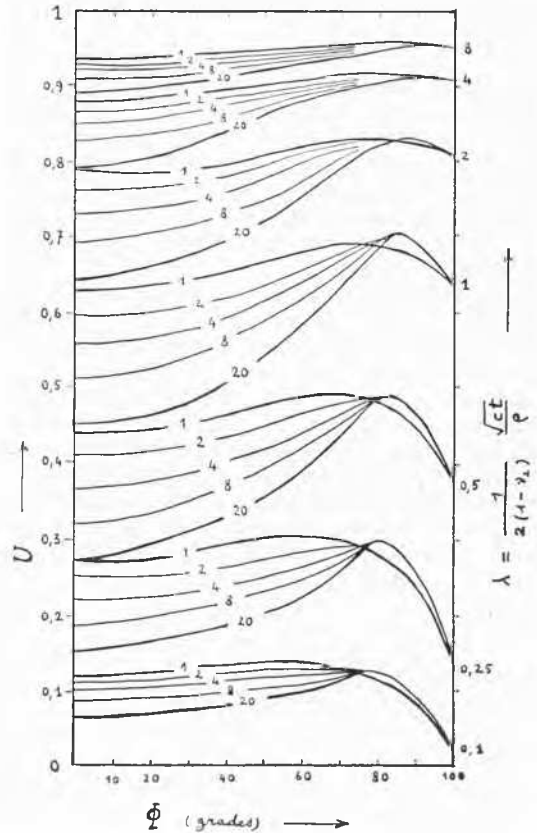
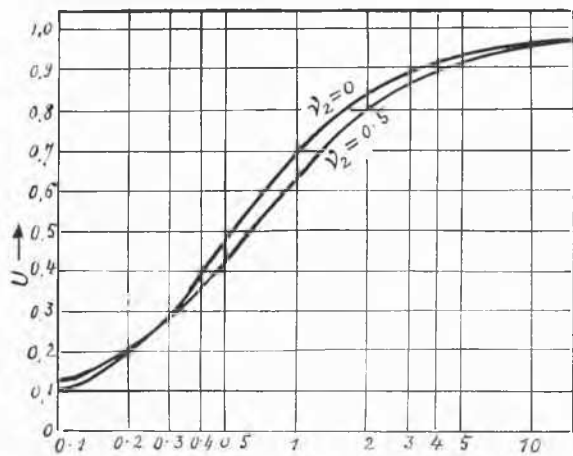


Fig. 3 Degré de consolidation (charge concentrée). Degree of consolidation (point load).

Pour  $\lambda > 8$  la détermination de  $U$  s'obtient à partir de la courbe  $\lambda = 8$  en remarquant que pour les valeurs élevées de  $\lambda$ ,  $1 - U$  est inversement proportionnel à  $\lambda$ .

Enfin pour les valeurs élevées de  $M$  et lorsque  $\Phi$  n'est pas voisin de  $\frac{\pi}{2}$ ,  $U$  ne dépend que de  $\frac{\lambda}{\cos \Phi} M^{-3}$ . La Fig. 4 donne les valeurs de  $U$  dans ce cas.



$$x = \left( \frac{1 - \nu_1}{M} \right)^{1/3} \frac{1}{1 - \nu_2} \frac{\sqrt{ct}}{h} \rightarrow$$

Fig. 4 Degré de consolidation pour les valeurs élevées de  $M = \mu_1/\mu_2$ .

Degree of consolidation for a very high value of  $M = \mu_1/\mu_2$ .

La Fig. 5 donne le tassement différé total écrit sous la forme :

$$\zeta_\infty - \zeta_0 = \frac{P}{4\pi} \frac{1 - 2\nu_2}{\mu_2} \frac{H(M, \Phi)}{\rho}$$

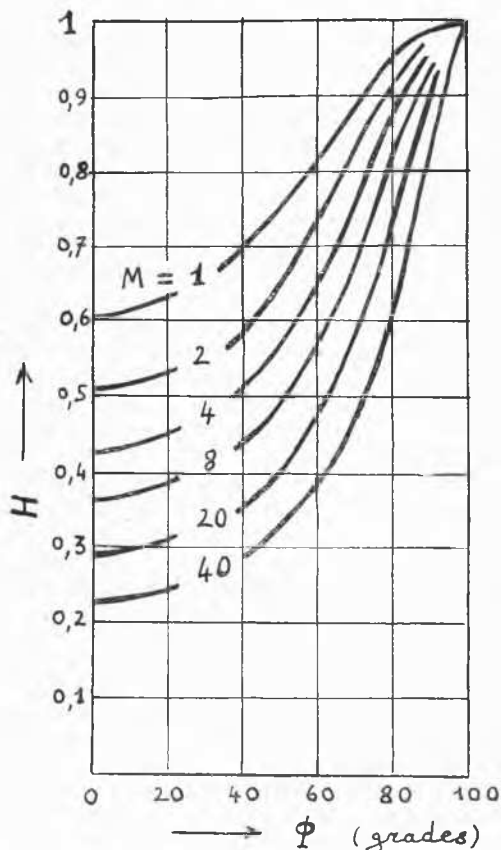


Fig. 5 Tassement différé total produit par une force concentrée. Total delayed settlement caused by a point load.

Les valeurs de  $H$  ont été déduites, non du calcul de l'intégrale  $I$  (qui suppose  $\nu_2 = 0,5$ ), mais de la différence des valeurs de  $F(\Phi)$  (formule 8-L, Fig. 2-L) pour  $\nu_2 = 0,25$  et  $\nu_2 = 0,5$ .

Pour les valeurs élevées de  $M$  on a, lorsque  $\Phi$  n'est pas voisin de  $\frac{\pi}{2}$  :

$$H(M, \Phi) = \frac{1,07}{\cos \Phi} M^{-1/3}$$

(b) Tassement au centre d'un pilier circulaire—La Fig. 6 donne le degré de consolidation  $U$  en fonction de  $\omega$ ,

$$\lambda = \frac{1}{2(1 - \nu_2)} \frac{\sqrt{ct}}{D} \text{ et } M. \text{ Toutes les remarques faites au}$$

sujet de la Fig. 3 s'appliquent aussi à la Fig. 6. La Fig. 4 donne ici encore le degré de consolidation pour les valeurs élevées de  $M$ .

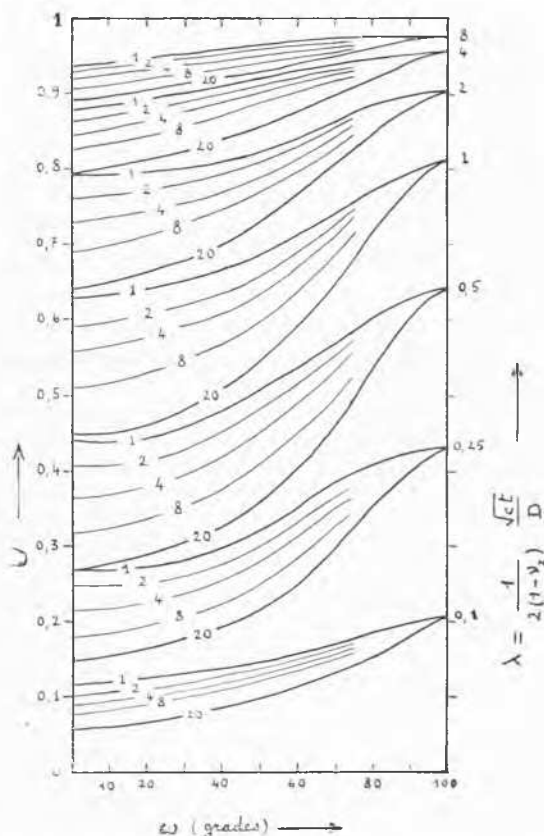


Fig. 6 Degré de consolidation au centre d'un pilier circulaire.

Degree of consolidation at the centre of a circular foundation.

La Fig. 7 donne le tassement différé total écrit sous la forme :

$$\zeta_\infty - \zeta_0 = \frac{P(1 - 2\nu_2)}{2\pi\mu_2} \frac{L(M, \omega)}{D}$$

Les valeurs de  $L$  ont été déduites, non du calcul de l'intégrale  $J$  (qui suppose  $\nu_2 = 0,5$ ), mais de la différence des valeurs de  $G(\omega)$  (Fig. 6-L) pour  $\nu_2 = 0,25$  et  $\nu_2 = 0,5$ .

Pour  $\omega = 0$  on a :  $L(M, 0) = \frac{1}{2} H(M, 0)$ .

Pour les valeurs élevées de  $M$ , on a, lorsque  $\omega$  n'est pas voisin de  $\frac{\pi}{2}$  :

$$L(M, \omega) = \frac{0,54}{\cos \omega} M^{-\frac{1}{3}}$$

*Remarque*—On a supposé la pression  $q$  uniformément répartie sur le cercle de base (fondation souple). Le tassement sous un pilier rigide serait un peu plus faible. On sait que pour une couche unique ( $h = 0$ ), le tassement sous un pilier

rigide est la fraction  $\frac{\pi}{4}$  du tassement calculé au centre dans

l'hypothèse  $q = \text{Cte}$ . Mais dans le cas du bicouche, plus  $M$  est élevé, moins la distribution des contraintes sur l'interface des 2 couches dépend de la distribution exacte des pressions sur le cercle. Il en résulte que dans la plupart des cas les résultats que nous donnons sont, avec une bonne approximation, valables aussi bien pour une fondation rigide que pour une fondation souple.

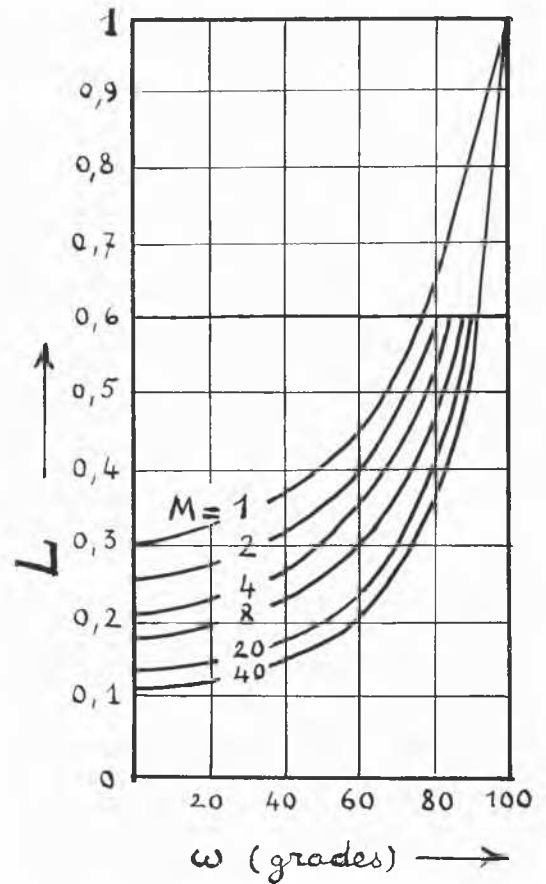


Fig. 7 Tassement différé total au centre d'un pilier circulaire  
Total delayed settlement at the centre of a circular foundation.