

# INTERNATIONAL SOCIETY FOR SOIL MECHANICS AND GEOTECHNICAL ENGINEERING



*This paper was downloaded from the Online Library of the International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering (ISSMGE). The library is available here:*

<https://www.issmge.org/publications/online-library>

*This is an open-access database that archives thousands of papers published under the Auspices of the ISSMGE and maintained by the Innovation and Development Committee of ISSMGE.*

# Déformation dans les milieux pulvérulents en état d'équilibre limite

## Strains in non Cohesive Media in Ultimate Equilibrium State

par Marcel DAVIN, Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées, Laboratoire central des Ponts et Chaussées, 58, boulevard Lefebvre, Paris 15<sup>e</sup>

### Sommaire

Dans un milieu pulvérulent parfait (courbe intrinsèque formée de 2 demi-droites issues de l'origine), l'état d'équilibre limite peut être déterminé sans considération des déformations, si le problème est à 2 dimensions. mais il n'en est plus de même pour un problème à 3 dimensions.

Nous avons admis que la déformation se décompose, dans un tel milieu, en un cisaillement pur le long d'une des deux directions de glissement, et une extension proportionnelle à ce cisaillement, perpendiculaire à la direction de glissement dans le plan des contraintes principales.

Nous en déduisons les dispositions relatives des cercles de Mohr des contraintes et des déformations, ainsi que celle des directions principales. Nous indiquons comment, avec ces hypothèses, les problèmes à 3 dimensions se trouvent déterminés.

Dans un problème plan relatif à un milieu pulvérulent, les équations d'équilibre statique, au nombre de deux, et l'équation d'état exprimant que le cercle de Mohr est tangent à la courbe intrinsèque (généralement considérée comme se composant de deux demi-droites issues d'un point de l'axe) suffisent en principe pour déterminer les 3 composantes du tenseur des contraintes. Il n'en est plus de même dans l'espace, où les équations d'équilibre sont au nombre de trois, mais les composantes du tenseur des contraintes au nombre de six. Il faut alors faire intervenir des hypothèses sur la relation entre le tenseur des contraintes et celui des déformations.\*

Même dans les problèmes plans, des difficultés se produisent par suite de la forme hyperbolique des équations et de la disposition relative des courbes caractéristiques qui en résultent. Des discontinuités peuvent être envisagées le long de courbes qui ne sont pas caractéristiques et ne peuvent alors être analysées sans un recours à la considération des déformations.

Le principe du travail maximum qui, pour les corps très ductiles, fournit des relations très simples et générales entre les deux tenseurs, ne peut s'appliquer au cas présent. En effet, un tenseur des contraintes correspondant à un état élastique (représenté par un cercle de Mohr intérieur à la courbe intrinsèque) peut être multiplié par un coefficient numérique aussi grand que l'on veut et cependant rester élastique. Son travail virtuel dans la déformation réellement constatée dans l'état d'équilibre limite, peut donc dépasser toute limite donnée à l'avance et en particulier dépasser le travail réel (du tenseur limite dans la déformation réelle).

Alors que dans le cas des corps très ductiles la simple connaissance de l'équation d'état limite entraîne celle (à un fac-

### Summary

In a perfectly non-cohesive medium (Mohr's envelope composed of 2 semi-straightlines) the state of ultimate equilibrium can be determined regardless of strains, if the problem is two-dimensional but this does not apply to three dimensions. The author has assumed that strain, in such a medium, is composed of shear along one of the two slip planes and an extension proportional to that shear, normal to the direction of the slip in the plane of the principal stresses. From this we can deduce the Mohr's circles of stress and strain, as well as the principal directions. The author indicates how three-dimensional problems can be well defined with the help of these assumptions.

teur numérique près) du tenseur des déformations correspondant à un tenseur limite donné, différentes considérations font penser que pour les corps pulvérulents d'autres données doivent intervenir.

La déformation dans l'état-limite peut être schématisée de la façon suivante : parmi les points de contact entre grains, certains cessent d'exister du fait de l'écartement des 2 grains, certains subsistent comme points de roulement, et les autres comme points de frottement. Le schéma est facile à étudier dans le cas de cylindres égaux empilés. Les axes parallèles de ces cylindres ont leurs traces, dans un plan de section droite, aux nœuds d'un réseau de triangles équilatéraux.

Une des directions de côtés de triangles du réseau étant supposée "horizontale" soient (1) les points de contact situés aux extrémités de diamètres horizontaux, (2) ceux aux extrémités des diamètres faisant 120° avec l'horizontale et (3) ceux aux extrémités des diamètres faisant 60°. Nous supposons l'ensemble soumis à un tenseur de contrainte statistiquement uniforme s'il est considéré à une échelle grande par rapport

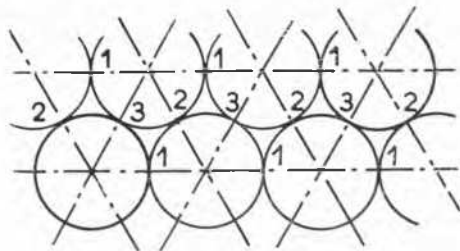


Fig. 1

\* Même l'hypothèse suivant laquelle la contrainte moyenne est égale à l'une des contraintes extrêmes ne saurait suffire à lever l'indétermination dans le cas général, puisqu'elle ne fournit qu'une équation supplémentaire.

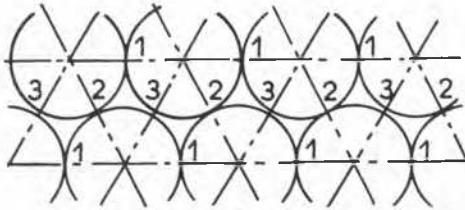


Fig. 2

au diamètre des cylindres. Plusieurs "cas de figure" correspondant à des "équilibres limites" sont alors possibles. Supposons par exemple que le décalage des couches horizontales les unes par rapport aux autres s'effectue, au départ, comme l'indique la figure précédente. Aux points (3) il y a écartement et le contact cesse; aux points (2) le déplacement relatif est un roulement, aux points (1) un glissement. Soit  $F_1$  la force normale s'exerçant, aux contacts (1),  $F_2$  celle s'exerçant aux contacts (2);  $G_1$ ,  $G_2$  les forces tangentielles correspondantes (le tout par unité de longueur de génératrice). L'équilibre d'un cercle en ce qui concerne la rotation autour de son centre nécessite, vu l'orientation des forces, la relation :

$$G_2 = G_1 = fF_1$$

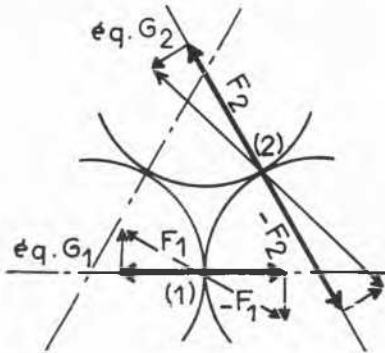


Fig. 3. Pour plus de clarté les forces de frottement  $G_1, G_2$  appliquées aux points de contact ont été figurées par des vecteurs équipollents.

Soient maintenant  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  les contraintes statistiques de contact rapportées à l'axe horizontal pris pour axe des  $x$  et à l'axe vertical pris pour axe des  $y$ , l'unité de largeur étant le diamètre des cylindres.

La contrainte horizontale à travers une coupure suivant en moyenne un plan vertical et comportant 1 contact (1) et 1/2 contact (2) par  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  unités de largeur est :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ F_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{F_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} G_2 \right) \right] = \\ &= \left( \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{f}{2} \right) F_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} F_2 \end{aligned}$$

La contrainte verticale à travers une coupure suivant en

moyenne un plan horizontal et comportant 1 contact (2) par unité de largeur est :

$$\sigma_y = \frac{\sqrt{3}}{2} F_2 - \frac{G_2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} F_2 - \frac{f}{2} F_1$$

La contrainte de cisaillement relative aux axes horizontal-vertical peut se calculer soit suivant la coupure "verticale en moyenne" soit suivant celle "horizontale en moyenne" d'où vérification :

$$\tau_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ G_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} F_2 - G_2 \right) \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} f F_1 + \frac{1}{2} F_2$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sqrt{3}}{2} G_2 + \frac{F_2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} f F_1 + \frac{1}{2} F_2$$

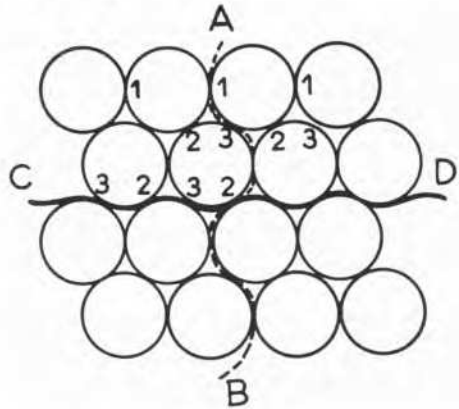


Fig. 4. AB : coupure suivant en moyenne un plan vertical. CD : coupure suivant en moyenne un plan horizontal.

L'élimination de  $F_1, F_2$  entre ces 3 équations donne la relation intrinsèque :

$$\tau_{xy} = \frac{f \sigma_x + \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_y}{1 + \frac{f}{\sqrt{3}}}$$

valable seulement dans certaines limites de variation compatibles avec le cas de figure étudié.

Pour faire ressortir les symétries du problème, et son invariance à l'égard d'une rotation de  $\frac{2K}{3}$ , nous faisons choix d'une unité de contrainte telle que :  $\sigma_x + \sigma_y = 2$  et nous posons :

$$\tau'_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

de sorte que :

$$\sigma_x = 1 + \tau'_{xy} \quad \sigma_y = 1 - \tau'_{xy}$$

Un point dans le plan  $\tau_{xy}, \tau'_{xy}$  détermine ainsi un tenseur de contrainte à un facteur près qui est la valeur, en unités

normales, de l'unité conventionnelle choisie pour faire  $\sigma_x + \sigma_y = 2$ . Mais à notre point de vue, tous les tenseurs proportionnels sont équivalents, les conditions de l'équilibre étant inchangées quand toutes les forces sont modifiées dans un même rapport.

On trouve en discutant les différents cas de figure (dans lesquels, sauf cas particuliers limites entre deux cas de figure différents, il y a toujours frottement de glissement sur les contacts d'une catégorie, roulement sur ceux d'une autre, et suppression du contact par écartement des cylindres, sur la catégorie restante, les catégories (1) (2) (3) permutant entre elles de toutes les façons possibles à cet égard) que le point figuratif  $\left| \begin{matrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xy}' \end{matrix} \right|$  parcourt, pour une valeur déterminée de  $f$ , un contour hexagonal fermé, admettant l'axe des  $\tau_{xy}$  et les deux droites d'angles polaires  $60^\circ$  et  $120^\circ$  comme axes de symétrie. Sur ces axes, ce contour a toujours 3 sommets indépendants de  $f$ , points de rayon polaire unité et d'angles polaires  $0, 120^\circ$  et  $-120^\circ$

$$\text{coordonnées } \left| \begin{matrix} \tau_{xy} = 1 \\ \tau_{xy}' = 0 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} \tau_{xy} = -\frac{1}{2} \\ \tau_{xy}' = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \right|$$

les 3 autres sommets sont également sur ces mêmes axes, mais de l'autre côté par rapport à l'origine (angles polaires  $180^\circ, -60^\circ$  et  $+60^\circ$ ) et à la distance  $\frac{1}{2} + f \frac{\sqrt{3}}{2}$  de l'origine). Ainsi, si  $f = 0$ , l'hexagone se réduit à un triangle équilatéral. Si  $f = \frac{1}{\sqrt{3}}$  il devient régulier, les 6 sommets étant

à la distance 1 de l'origine. Si  $f > \frac{1}{\sqrt{3}}$ , l'hexagone présente

des points extérieurs au cercle :  $\tau_{xy}^2 + \tau_{xy}'^2 = 1$ , ce qui exprime que le milieu peut, dans certaines directions, transmettre des tractions.

Ce système, aux propriétés assez curieuses, n'est toutefois pas isotrope et par conséquent la considération du cercle de

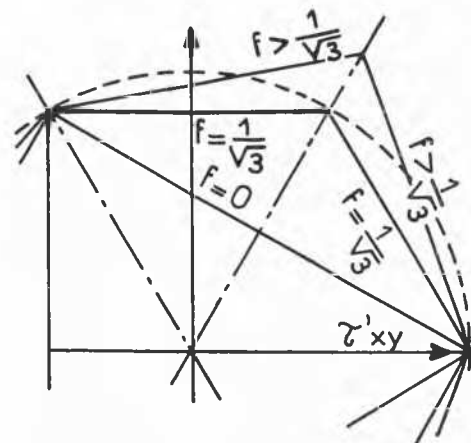


Fig. 5

Mohr n'aurait pour lui que peu d'intérêt, et il n'a pas de courbe intrinsèque au sens classique de l'expression. Les contours hexagonaux ci-dessus, bien qu'exprimant des propriétés intrinsèques, ne peuvent pas, même par une transformation appropriée, donner naissance à des courbes intrinsèques.

Dans le cas général isotrope "au départ" (c'est-à-dire avant l'application du tenseur de contraintes) par compensation statistique, nous avons admis, en nous limitant au milieu pulvérulent parfait, c'est-à-dire possédant une courbe intrinsèque composée de deux demi-droites symétriques par rapport à l'axe horizontal et passant par l'origine) et en nous inspirant de ceux des résultats de l'étude ci-dessus qui paraissent pouvoir s'y étendre, que le tenseur des déformations est, en grandeur, défini à un facteur constant près. On peut décomposer la déformation en un cisaillement pur le long de la direction de glissement et 3 extensions, une suivant la direction de glissement et 2 suivant la direction perpendiculaire dans le plan des contraintes principales extrêmes et une suivant une direction de la contrainte principale moyenne. Nos hypothèses supplémentaires sont : que la 2<sup>e</sup> de ces 3 extensions est positive, ce que le bon sens indique (écartement des grains) et que l'expérience confirme toujours ; que la 1<sup>re</sup> et la 3<sup>e</sup> sont négligeables.\*

Le rapport entre le glissement  $2g$  et l'extension  $d$  suivant la perpendiculaire à la ligne de glissement serait alors une caractéristique du matériau pulvérulent considéré. Pour une valeur

donnée de "l'angle de frottement interne"  $\varphi$ , le rapport  $\frac{d}{2g}$  est limité par la condition que le travail des forces de frottement est positif :

$$\frac{d}{2g} < \operatorname{tg} \psi. \text{ On pose } \operatorname{tg} \psi = \frac{2g}{d} \text{ d'où } : \frac{\pi}{2} > \psi > \frac{\pi}{2} - \varphi$$

Les deux cercles de Mohr ont alors les dispositions suivantes :

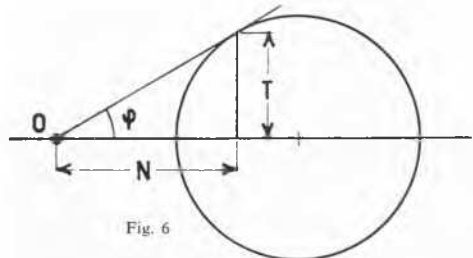


Fig. 6

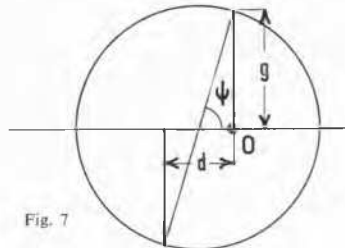
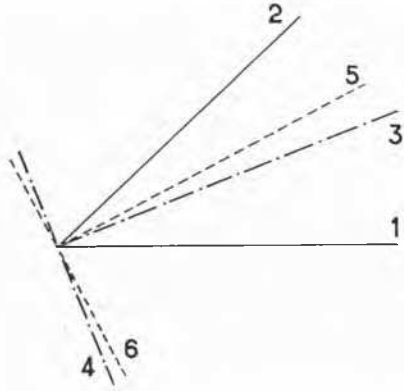


Fig. 7

\* Les expériences dans lesquelles se produisent des lignes de rupture différentes des lignes de glissements prévues peuvent être interprétées par l'influence du frottement du milieu sur la surface qui lui transmet une pression.

Les axes des deux tenseurs seraient alors disposés comme suit :



- 1 ligne de glissement active
- 2 ligne de glissement non active
- 3 direction principale de contrainte (contrainte maxima)
- 4 direction principale de contrainte (contrainte minima)
- 5 direction principale de déformation (contraction)
- 6 direction principale de déformation (extension)

Fig. 8

Les 2 tenseurs ont ainsi un axe commun (perpendiculaire au plan de la figure précédente) et dans le plan de la figure les axes de celui des déformations sont par rapport à ceux des contraintes décalés d'un angle constant, caractéristique

du milieu étudié, égal à  $\frac{1}{2}(\psi + \varphi - \frac{\pi}{2})$ , dans le sens qui va

de la ligne de glissement "active" jusqu'à la ligne de glissement "non active" par l'angle aigu. Les deux lignes de glissement dans les hypothèses ci-dessus, ne jouent pas le même rôle, il y a une dissymétrie, et deux mouvements sont possibles pour un même tenseur de contraintes ; mais ils ne peuvent se combiner, ce qui donnerait au tenseur des déformations un degré de liberté de trop et impliquerait une augmentation du nombre des contacts rompus entre grains, incompatible avec l'équilibre. Le choix entre les deux mouvements possibles dépend des conditions aux limites (qui devront être données sous la forme générale d'une relation entre les contraintes exercées par les corps agissant sur le milieu, et leurs propres déformations).

Avec les hypothèses indiquées, le tenseur des déformations défini par 3 paramètres d'orientation et 3 paramètres  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3$  de grandeur (extensions principales), doit satisfaire à 2 conditions (relatives aux paramètres de grandeur)

$$\epsilon_3 = 0 \quad \epsilon_2 = -\epsilon_1 \tan^2 \frac{\psi}{2}$$

il ne lui reste donc que 4 degrés de liberté.

De plus, il satisfait à 3 équations de continuité.

Ces équations sont la traduction des équations cartésiennes de continuité dans l'espace à 3 dimensions, savoir,

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = 0$$

et 2 analogues par permutation circulaire de  $x, y, z$ . Pour les obtenir il faut d'abord choisir les 3 paramètres qui définissent l'orientation du trièdre principal. Les cosinus directeurs présentent une symétrie parfaite, malheureusement ils sont au nombre de 9 liés par 6 relations ; les 3 paramètres indépendants que nous avons choisis sont deux d'entre eux,  $\alpha_3$  et  $\beta_3$ , cosinus directeurs de l'axe n° 3 du trièdre principal par rapport aux axes  $Ox$  et  $Oy$ , et l'angle  $\theta$ , somme de la longitude de l'axe n° 1 du trièdre principal par rapport au méridien qui rencontre l'axe des  $z$  du trièdre fixe et l'axe n° 3 du trièdre principal (longitude sur la sphère liée au trièdre principal) et de la longitude dudit méridien commun par rapport au méridien qui rencontre les axes  $Oz$  et  $Ox$  (longitude sur la sphère liée au trièdre fixe). En fonction de ces 3 quantités, les expressions des 9 cosinus directeurs sont relativement simples :

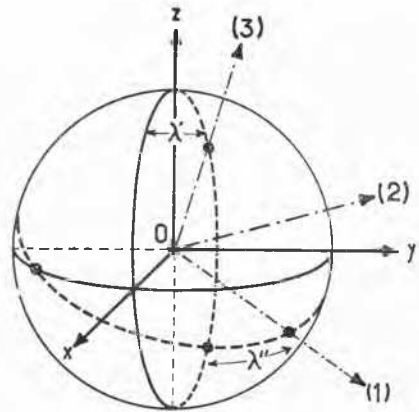


Fig. 9

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \cos \theta - \frac{\alpha_3 \alpha_3 \cos \theta + \beta_3 \sin \theta}{1 + \sqrt{1 - \alpha_3^2 - \beta_3^2}} \\ \beta_1 &= \sin \theta - \frac{\beta_3 (\alpha_3 \cos \theta + \beta_3 \sin \theta)}{1 + \sqrt{1 - \alpha_3^2 - \beta_3^2}} \\ \gamma_1 &= -(\alpha_3 \cos \theta + \beta_3 \sin \theta) \\ \alpha_2 &= -\sin \theta + \frac{\alpha_3 (\alpha_3 \sin \theta - \beta_3 \cos \theta)}{1 + \sqrt{1 - \alpha_3^2 - \beta_3^2}} \\ \beta_2 &= \cos \theta + \frac{\beta_3 (\alpha_3 \sin \theta - \beta_3 \cos \theta)}{1 + \sqrt{1 - \alpha_3^2 - \beta_3^2}} \\ \gamma_2 &= +(\alpha_3 \sin \theta - \beta_3 \cos \theta) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \alpha_3 &= \alpha_3 \\ \beta_3 &= \beta_3 \\ \gamma_3 &= \sqrt{1 - \alpha_3^2 - \beta_3^2} \end{aligned}$$

Nous supposons que les deux trièdres coïncident (c'est-à-dire que le trièdre principal est choisi comme trièdre de réfé-

rence fixe) en un point P du milieu, pour le voisinage duquel seront valables les équations différentielles que nous nous proposons d'écrire. Nous obtiendrons donc ces équations sous une forme particulière, intrinsèque, qu'il faudrait bien se garder de traiter comme variables telles quelles dans un domaine fini du milieu, mais qui peuvent suffire pour les recherches sur les multiplicités caractéristiques par exemple.

La coïncidence prévue est telle que (1) vient se confondre avec Ox, (2) avec Oy et (3) avec Oz. Dans ces conditions les formules ci-dessus se simplifient et on a :

$$\alpha_3 = \beta_3 = \theta = 0$$

d'où :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_2 = \gamma_3 = 1 \\ \alpha_2 &= \alpha_3 = \beta_3 = \beta_1 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0 \end{aligned}$$

Les différentielles des cosinus directeurs au voisinage de la coïncidence sont :

$$\begin{aligned} d\alpha_1 &= 0 & d\alpha_2 &= -d\theta & d\alpha_3 &= d\alpha_3 \\ d\beta_1 &= d\theta & d\beta_2 &= 0 & d\beta_3 &= d\beta_3 \\ d\gamma_1 &= -d\alpha_3 & d\gamma_2 &= -d\beta_3 & d\gamma_3 &= 0 \end{aligned}$$

d'où l'on tire les différentielles des composantes cartésiennes du tenseur en fonction de celles de ses paramètres d'intensité ( $d\epsilon_1, d\epsilon_2, d\epsilon_3$ ) et de ses paramètres d'orientation ( $d\alpha_3, d\beta_3, d\theta$ ) en tenant compte de l'expression de ces composantes cartésiennes :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_1\alpha_1^2 + \epsilon_2\alpha_2^2 + \epsilon_3\alpha_3^2 & \text{et analogues pour } \epsilon_y, \epsilon_z \\ \epsilon_{xy} &= \epsilon_1\alpha_1\beta_1 + \epsilon_2\alpha_2\beta_2 + \epsilon_3\alpha_3\beta_3 & \quad \quad \quad \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx} \end{aligned}$$

Lesdites différentielles sont :

$$\begin{aligned} d\epsilon_x &= d\epsilon_1 & d\epsilon_{xy} &= (\epsilon_1 - \epsilon_2)d\theta \\ d\epsilon_y &= d\epsilon_2 & d\epsilon_{yz} &= (\epsilon_3 - \epsilon_2)d\beta_3 \\ d\epsilon_z &= d\epsilon_3 & d\epsilon_{zx} &= (\epsilon_3 - \epsilon_1)d\alpha_3 \end{aligned}$$

Pour pouvoir transformer les équations de continuité il faut d'ailleurs pousser jusqu'aux dérivées secondes. Si le tenseur dépend de variables  $\xi_i, \xi_j, \dots$  (dont la signification peut être quelconque, mais qui dans l'application ultérieure seront les coordonnées courantes au voisinage de P) ses éléments cartésiens ont des dérivées secondes non-mixtes, que nous

noterons  $\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial_i^2}$  et des dérivées secondes mixtes (notées  $\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial_i\partial_j}$ ). Ces dérivées secondes s'expriment en fonction des dérivées premières, et secondes mixtes ou non, des paramètres d'intensité et d'orientation du même tenseur par rapport aux mêmes variables.

Nous avons obtenu les expressions suivantes (dérivées non-mixtes des éléments cartésiens d'extension, et dérivées mixtes de ceux de cisaillement, seuls utiles pour la transformation des équations de continuité) :

$$\frac{\partial^2\epsilon_x}{\partial_i^2} = \frac{\partial^2\epsilon_1}{\partial_i^2} + 2(\epsilon_2 - \epsilon_1)\left(\frac{\partial\theta}{\partial_i}\right)^2 + 2(\epsilon_3 - \epsilon_1)\left(\frac{\partial\alpha_3}{\partial_i}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2\epsilon_y}{\partial_i^2} = \frac{\partial^2\epsilon_2}{\partial_i^2} + 2(\epsilon_1 - \epsilon_2)\left(\frac{\partial\theta}{\partial_i}\right)^2 + 2(\epsilon_3 - \epsilon_2)\left(\frac{\partial\beta_3}{\partial_i}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2\epsilon_z}{\partial_i^2} = \frac{\partial^2\epsilon_3}{\partial_i^2} + 2(\epsilon_1 - \epsilon_3)\left(\frac{\partial\alpha_3}{\partial_i}\right)^2 + 2(\epsilon_2 - \epsilon_3)\left(\frac{\partial\beta_3}{\partial_i}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\epsilon_{xy}}{\partial_i\partial_j} &= \frac{\partial}{\partial_i}(\epsilon_1 - \epsilon_2)\frac{\partial\theta}{\partial_j} + \frac{\partial}{\partial_j}(\epsilon_1 - \epsilon_2)\frac{\partial\theta}{\partial_i} + (\epsilon_1 - \epsilon_2)\frac{\partial^2\theta}{\partial_i\partial_j} \\ &+ \left(\frac{2\epsilon_3 - \epsilon_2 - \epsilon_1}{2}\right)\left(\frac{\partial\alpha_3}{\partial_i}\frac{\partial\beta_3}{\partial_j} + \frac{\partial\alpha_3}{\partial_j}\frac{\partial\beta_3}{\partial_i}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\epsilon_{yz}}{\partial_i\partial_j} &= \frac{\partial}{\partial_i}(\epsilon_3 - \epsilon_2)\frac{\partial\beta_3}{\partial_j} + \frac{\partial}{\partial_j}(\epsilon_3 - \epsilon_2)\frac{\partial\beta_3}{\partial_i} \\ &+ (\epsilon_3 - \epsilon_2)\frac{\partial^2\beta_3}{\partial_i\partial_j} + (\epsilon_2 - \epsilon_1)\left(\frac{\partial\theta}{\partial_i}\frac{\partial\alpha_3}{\partial_j} + \frac{\partial\theta}{\partial_j}\frac{\partial\alpha_3}{\partial_i}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\epsilon_{zx}}{\partial_i\partial_j} &= \frac{\partial}{\partial_i}(\epsilon_3 - \epsilon_1)\frac{\partial\alpha_3}{\partial_j} + \frac{\partial}{\partial_j}(\epsilon_3 - \epsilon_1)\frac{\partial\alpha_3}{\partial_i} \\ &+ (\epsilon_3 - \epsilon_1)\frac{\partial^2\alpha_3}{\partial_i\partial_j} + (\epsilon_2 - \epsilon_1)\left(\frac{\partial\theta}{\partial_i}\frac{\partial\beta_3}{\partial_j} + \frac{\partial\theta}{\partial_j}\frac{\partial\beta_3}{\partial_i}\right) \end{aligned}$$

Il suffit de porter ces expressions dans les équations cartésiennes de continuité données plus haut, pour obtenir les équations cherchées ( $\xi_i, \xi_j$  étant remplacés chaque fois par la variable qui convient parmi les 3 coordonnées courantes  $x, y, z$ ).

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2\epsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\epsilon_2}{\partial x^2} + 2(\epsilon_2 - \epsilon_1)\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2\right] \\ &+ 2\frac{\partial}{\partial x}(\epsilon_2 - \epsilon_1)\frac{\partial\theta}{\partial y} + 2\frac{\partial}{\partial y}(\epsilon_2 - \epsilon_1)\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2(\epsilon_2 - \epsilon_1)\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} \\ &+ 2(\epsilon_3 - \epsilon_1)\left(\frac{\partial\alpha_3}{\partial y}\right)^2 + 2(\epsilon_3 - \epsilon_2)\left(\frac{\partial\beta_3}{\partial x}\right)^2 \\ &- (2\epsilon_3 - \epsilon_1 - \epsilon_2)\left(\frac{\partial\alpha_3}{\partial x}\frac{\partial\beta_3}{\partial y} + \frac{\partial\alpha_3}{\partial y}\frac{\partial\beta_3}{\partial x}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2\epsilon_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\epsilon_3}{\partial y^2} + 2(\epsilon_3 - \epsilon_2)\left[\left(\frac{\partial\beta_3}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial\beta_3}{\partial y}\right)^2\right] \\ &+ 2\frac{\partial}{\partial y}(\epsilon_3 - \epsilon_2)\frac{\partial\beta_3}{\partial z} + 2\frac{\partial}{\partial z}(\epsilon_2 - \epsilon_3)\frac{\partial\beta_3}{\partial y} + 2(\epsilon_2 - \epsilon_3)\frac{\partial^2\beta_3}{\partial y\partial z} \\ &+ 2(\epsilon_1 - \epsilon_2)\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2 + 2(\epsilon_1 - \epsilon_3)\left(\frac{\partial\alpha_3}{\partial y}\right)^2 \\ &- 2(\epsilon_2 - \epsilon_1)\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial\alpha_3}{\partial z} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial\alpha_3}{\partial y}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2\epsilon_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\epsilon_3}{\partial x^2} + 2(\epsilon_3 - \epsilon_1)\left[\left(\frac{\partial\alpha_3}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial\alpha_3}{\partial x}\right)^2\right] \\ &+ 2\frac{\partial}{\partial x}(\epsilon_1 - \epsilon_3)\frac{\partial\alpha_3}{\partial z} + 2\frac{\partial}{\partial z}(\epsilon_1 - \epsilon_3)\frac{\partial\alpha_3}{\partial x} + 2(\epsilon_1 - \epsilon_3)\frac{\partial^2\alpha_3}{\partial x\partial z} \\ &+ 2(\epsilon_2 - \epsilon_1)\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2 + 2(\epsilon_2 - \epsilon_3)\left(\frac{\partial\beta_3}{\partial x}\right)^2 \\ &- 2(\epsilon_2 - \epsilon_1)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\beta_3}{\partial z} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial\beta_3}{\partial x}\right) = 0 \end{aligned}$$

Portant dans ces équations les conditions  $\varepsilon_3 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1 \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2}$  (où  $\psi$  est une constante caractéristique du matériau) nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x^2} - 2\varepsilon_1 \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} \right) \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right] \\ & - 2 \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} \right) \left[ \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \varepsilon_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \right] \\ & - 2\varepsilon_1 \left( \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} \right)^2 + 2\varepsilon_1 \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} \left( \frac{\partial \beta_3}{\partial x} \right)^2 \\ & + \varepsilon_1 \left( 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} \right) \left( \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} \frac{\partial \beta_3}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} \frac{\partial \beta_3}{\partial x} \right) = 0 \\ & - \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial z^2} + 2\varepsilon_1 \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} \left[ \left( \frac{\partial \beta_3}{\partial z} \right)^2 - \left( \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} \right)^2 \right] \\ & - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} \left[ \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} \frac{\partial \beta_3}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} \frac{\partial \beta_3}{\partial y} + \varepsilon_1 \frac{\partial^2 \beta_3}{\partial y \partial z} \right] \\ & + 2\varepsilon_1 \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} \right) \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + 2\varepsilon_1 \left( \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} \right)^2 \\ & + 2\varepsilon_1 \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} \right) \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \alpha_3}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} \right) = 0 \\ & \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial z^2} - 2\varepsilon_1 \left[ \left( \frac{\partial \alpha_3}{\partial z} \right)^2 - \left( \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} \right)^2 \right] \\ & + 2 \left[ \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} \frac{\partial \alpha_3}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} + \varepsilon_1 \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial x \partial z} \right] \\ & - 2\varepsilon_1 \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} \right) \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 - 2\varepsilon_1 \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} \left( \frac{\partial \beta_3}{\partial x} \right)^2 \\ & + 2\varepsilon_1 \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} \right) \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \beta_3}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \beta_3}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned}$$

soit 3 relations différentielles entre les 4 fonctions inconnues  $\varepsilon_1, \theta, \alpha_3, \beta_3$ .

Le tenseur des contraintes peut lui aussi être défini par ses paramètres d'intensité (les 3 compressions principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) et ses paramètres d'orientation définis comme ceux du tenseur des déformations. Ces derniers seront  $\alpha_3' = \alpha_3$  et  $\beta_3' = \beta_3$  (cosinus directeurs de la direction principale de contrainte principale moyenne) et

$$\theta' = \theta + \varphi' \text{ avec } |\varphi'| = \frac{\psi}{2} + \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}, \text{ (voir Figs. 8 et 9)}$$

ils n'introduisent aucune fonction inconnue nouvelle.

Par contre les paramètres d'intensité  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  en introduisent deux. Ils sont en effet soumis à 3 conditions seulement, dont deux ne sont que des inégalités :

(1) Les contraintes qu'ils représentent sont toutes trois des compressions (nous les comptons positivement).

(2) Leur classement par intensité décroissante est le suivant :

Compression maxima	$\sigma_2$ suivant $Oy'$
intermédiaire	$\sigma_3$ — $Oz$
minima	$\sigma_1$ — $Ox'$

Les deux conditions ci-dessus s'expriment par les inégalités :  $\sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_1 > 0$ .

(3) Il existe entre  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  la relation métrique :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\psi}{2} - |\varphi'| \right)$$

$\sigma_2$  étant donné positif,  $\sigma_1$  résulte de l'équation ci-dessus et  $\sigma_3$  est arbitraire tant qu'il satisfait les inégalités :

$$\sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_1$$

Les deux fonctions nouvelles sont donc  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  et les équations d'équilibre sont obtenues par le calcul suivant qui nécessite la détermination des dérivées premières de  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  dans le cas de coïncidence des axes du tenseur des déformations avec les axes de référence.

Les équations d'équilibre par rapport aux éléments cartésiens sont :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

et analogues par permutation circulaire de  $x, y, z$  avec  $\sigma_x = \sigma_x \alpha_1'^2 + \sigma_y \alpha_2'^2 + \sigma_z \alpha_3'^2$

et analogues par permutation circulaire simultanée de  $x, y, z$  et  $\alpha, \beta, \gamma$ .

$$\tau_{xy} = \sigma_1 \alpha_1' \beta_1' + \sigma_2 \alpha_2' \beta_2' + \sigma_3 \alpha_3' \beta_3'$$

et analogues par permutation circulaire simultanée de  $x, y, z$  et  $\alpha, \beta, \gamma$  les  $\alpha_1', \beta_1', \gamma_1', \dots$  étant les cosinus directeurs des axes du trièdre principal des contraintes, exprimables comme dans le cas du trièdre des déformations en fonction de deux d'entre eux

$$\beta_3', \gamma_3', \text{ égaux à } \beta_3, \gamma_3, \text{ et de } \theta' = \theta + \varphi'.$$

Au voisinage de  $\beta_3 = \gamma_3 = \theta = 0$ , les cosinus directeurs et leurs différentielles sont

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= \beta_2' = \cos \varphi'; \alpha_2' = -\sin \varphi'; \beta_1' = \sin \varphi'; \\ \gamma_1' &= \gamma_2' = \alpha_3' = \beta_3' = 0; \gamma_3' = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\alpha_1' &= -\sin \varphi' d\theta \\ d\beta_1' &= \cos \varphi' d\theta \\ d\gamma_1' &= -\cos \varphi' d\alpha_3 - \sin \varphi' d\beta_3 \\ d\alpha_2' &= -\cos \varphi' d\theta \\ d\beta_2' &= -\sin \varphi' d\theta \\ d\gamma_2' &= \sin \varphi' d\alpha_3 - \cos \varphi' d\beta_3 \\ d\alpha_3' &= d\alpha_3 \\ d\beta_3' &= d\beta_3 \\ d\gamma_3' &= 0 \end{aligned}$$

d'où l'on tire les différentielles des éléments cartésiens du tenseur :

$$d\sigma_x = \cos^2 \varphi' d\sigma_1 + \sin^2 \varphi' d\sigma_2 + \sin 2\varphi' (\sigma_2 - \sigma_1) d\theta.$$

$$d\sigma_y = \sin^2 \varphi' d\sigma_1 + \cos^2 \varphi' d\sigma_2 + \sin 2\varphi' (\sigma_1 - \sigma_2) d\theta.$$

$$d\sigma_z = d\sigma_3$$

$$d\tau_{xy} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi' (d\sigma_1 - d\sigma_2) + \cos 2\varphi' (\sigma_1 - \sigma_2) d\theta$$

$$d\tau_{yz} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi' (\sigma_2 - \sigma_1) d\alpha_3 + \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{2} d\beta_3$$

$$+ \frac{1}{2} \cos 2\varphi' (\sigma_1 - \sigma_2) d\beta_3$$

$$d\tau_{zz} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi' (\sigma_2 - \sigma_1) d\beta_3 + \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{2} d\alpha_3 + \frac{1}{2} \cos 2\varphi' (\sigma_2 - \sigma_1) d\alpha_3$$

Les équations d'équilibre deviennent alors :

$$\begin{aligned} & \cos 2\varphi' \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial(\sigma_1 - \sigma_2)}{\partial x} + (\sigma_1 - \sigma_2) \left( \frac{\partial\theta}{\partial y} - \frac{\partial\alpha_3}{2\partial z} \right) \right] \\ & + \sin 2\varphi' \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial(\sigma_1 - \sigma_2)}{\partial y} + (\sigma_1 - \sigma_2) \left( -\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\beta_3}{2\partial z} \right) \right] \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial(\sigma_1 + \sigma_2)}{\partial x} + \left( \frac{2\sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_2)}{2} \right) \frac{\partial\alpha_3}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos 2\varphi' \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial(\sigma_2 - \sigma_1)}{\partial y} + (\sigma_2 - \sigma_1) \left( -\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\beta_3}{2\partial z} \right) \right] \\ & + \sin 2\varphi' \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial(\sigma_2 - \sigma_1)}{\partial x} + (\sigma_2 - \sigma_1) \left( -\frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial\alpha_3}{2\partial z} \right) \right] \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial(\sigma_2 + \sigma_1)}{\partial y} + \left( \frac{2\sigma_3 - (\sigma_2 + \sigma_1)}{2} \right) \frac{\partial\beta_3}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos 2\varphi' \left[ \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_1) \left( \frac{\partial\alpha_3}{\partial x} - \frac{\partial\beta_3}{\partial y} \right) \right] \\ & + \sin 2\varphi' \left[ \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_1) \left( \frac{\partial\alpha_3}{\partial y} + \frac{\partial\beta_3}{\partial x} \right) \right] \\ & + \frac{\partial\sigma_3}{\partial z} + \left( \frac{2\sigma_3 - (\sigma_2 + \sigma_1)}{2} \right) \left( \frac{\partial\alpha_3}{\partial x} + \frac{\partial\beta_3}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$

On remarquera que dans ces calculs la transformation suivante : permutation de  $x$  et  $y$ ,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , changement de signe de  $\varphi'$  et  $\theta$ , laisse les systèmes invariants, certaines équations restant invariante, d'autres permutent 2 à 2.

Compte tenu de  $\sigma_1 = \sigma_2 \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\psi}{2} - |\varphi'| \right)$  il vient :

$$\begin{aligned} & \left[ \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\psi}{2} - |\varphi'| \right) - 1 \right] \left[ \cos 2\varphi' \left( \frac{\partial\sigma_2}{2\partial x} + \sigma_2 \left( \frac{\partial\theta}{\partial y} - \frac{\partial\alpha_3}{2\partial z} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. + \sin 2\varphi' \left( \frac{\partial\sigma_2}{2\partial y} + \sigma_2 \left( -\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\beta_3}{2\partial z} \right) \right) \right] \\ & + \left[ \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\psi}{2} - |\varphi'| \right) + 1 \right] \left[ \left( \frac{\partial\sigma_2}{2\partial x} - \sigma_2 \frac{\partial\alpha_3}{2\partial z} \right) + \sigma_3 \frac{\partial\alpha_3}{\partial z} = 0. \right. \\ & \left[ 1 - \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\psi}{2} - |\varphi'| \right) \right] \left[ \cos 2\varphi' \left( \frac{\partial\sigma_2}{2\partial y} + \sigma_2 - \frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\beta_3}{2\partial z} \right) \right] \\ & \quad \left. + \sin 2\varphi' \left( -\frac{\partial\sigma_2}{2\partial x} + \sigma_2 - \frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial\alpha_3}{2\partial z} \right) \right] \\ & + \left[ \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\psi}{2} - |\varphi'| \right) + 1 \right] \left[ \left( \frac{\partial\sigma_2}{2\partial y} - \sigma_2 \frac{\partial\beta_3}{2\partial z} \right) + \sigma_3 \frac{\partial\beta_3}{\partial z} = 0. \right. \\ & \left[ 1 - \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\psi}{2} - |\varphi'| \right) \right] \left[ \cos 2\varphi' \left( \frac{\partial\alpha_3}{2\partial x} - \frac{\partial\beta_3}{2\partial y} \right) \right. \\ & \quad \left. + \sin 2\varphi' \left( \frac{\partial\alpha_3}{2\partial y} + \frac{\partial\beta_3}{2\partial x} \right) \right] \sigma_2 \\ & + \left[ \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\psi}{2} - |\varphi'| \right) + 1 \right] \left[ -\frac{\partial\alpha_3}{2\partial x} - \frac{\partial\beta_3}{2\partial y} \right] \sigma_2 \\ & \quad + \frac{\partial\sigma_3}{\partial z} + \sigma_3 \left( \frac{\partial\alpha_3}{\partial x} + \frac{\partial\beta_3}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$

En définitive nous avons les 3 équations de continuité et les 3 équations d'équilibre pour déterminer 6 fonctions savoir :

- les 3 paramètres d'orientation  $\alpha_3, \beta_3, \theta$ ,
- la déformation principale  $\varepsilon_1$ ,
- les contraintes principales  $\sigma_2, \sigma_3$ ,

tous les autres éléments des tenseurs des déformations et des contraintes se déduisant immédiatement de ces 6 quantités.

L'étude de ces équations ne permet pas, dans les cas généraux, d'obtenir facilement des solutions par intégration ; mais elle permet de définir des "caractéristiques" et d'aborder certains cas simplifiés par l'existence d'une symétrie.