

INTERNATIONAL SOCIETY FOR SOIL MECHANICS AND GEOTECHNICAL ENGINEERING



This paper was downloaded from the Online Library of the International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering (ISSMGE). The library is available here:

<https://www.issmge.org/publications/online-library>

This is an open-access database that archives thousands of papers published under the Auspices of the ISSMGE and maintained by the Innovation and Development Committee of ISSMGE.

Distribution des contraintes à la rupture, forme de la surface de glissement et hauteur théorique des talus

Stress Distribution and Slip Surface on Embankments

par KOPÁCSY, J., dr. Chef de section « Mécanique des sols » du Bureau d'Etudes du Génie civil, Táncsics Mihály utca 14, Budapest 1

Sommaire

Calcul dans un massif en terre à deux dimensions, de la surface théorique de glissement et de la distribution des contraintes à la rupture. Application au problème de la stabilité des talus.

Dans le calcul de la stabilité des talus, ou d'ouvrages similaires, on ne connaît ni la forme théorique de la surface de glissement, ni la loi de la répartition des réactions du sol sur cette surface.

Dans la pratique, la recherche de la hauteur limite des talus se fait suivant des méthodes variées, comportant des hypothèses sur la géométrie de la surface de glissement et sur la réaction du sol.

Dans cette communication nous avons cherché à déterminer exactement la hauteur limite d'un talus en fonction des caractéristiques mécaniques, physiques, géométriques de sa matière et en faisant les hypothèses suivantes, en pratique applicables :

1. Le matériau est homogène, isotrope et pesant de densité γ .
2. Le talus est indéfini et la déformation est plane.
3. Le talus est limité par une courbe continue, et les dérivées premières sont continues sauf en un nombre fini de points.
4. La surcharge répartie sur le talus est distribuée de façon continue, sa discontinuité ainsi que celle de sa dérivée ne pouvant exister qu'en un nombre limité de points. La surcharge croît de façon continue jusqu'à la rupture.
5. L'équilibre à la rupture suit la loi de Coulomb

$$\tau = c + \sigma \tan \varphi$$

6. Par application de la théorie des minima, on cherche la charge la plus faible produisant la rupture effective. L'augmentation de la surcharge au-delà produit la rupture suivant une surface de glissement sur laquelle règne la distribution des contraintes due à la surcharge minimum.

L'accroissement de la hauteur du talus, intervient naturellement comme une augmentation de la surcharge.

Soit $y_0 = y_0(x)$ l'équation de la limite du talus ; $q = q(x, y_0)$ l'équation de la surcharge dont les composantes sont $q_x = q_x(x, y_0)$ et $q_y = q_y(x, y_0)$ (Fig. 1). La surface de glissement définie par $y = y(x)$ doit avoir une forme telle que la résultante (P) de toutes les forces extérieures ait une composante verticale P_y minimum. Si $\alpha = \alpha(x)$ désigne l'inclinaison sur l'horizontale de la courbe limitant le talus, on a

$$P_y = \int_A^C \left[\frac{q_y}{\cos \alpha} + \gamma(y - y_0) \right] dx = \min ! \quad \dots \quad (1)$$

Summary

The equations of the theoretical slip surface and of stress distribution in earth works are derived in two dimensions. The results are used at the problem of stability of earth slopes.

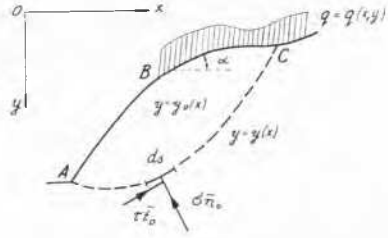


Fig. 1

Cette force est équilibrée par les contraintes normales (σ) et tangentielles (τ) sur la surface de glissement. Les équations d'équilibre s'obtiennent par les conditions de minimum. Les forces et contraintes sont exprimées en calcul vectoriel, avec des vecteurs unités \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} .

Le vecteur relatif à la surface de glissement est :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y(x)\vec{j} = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2a)$$

Celui de la surface de talus est

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y_0(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad (2b)$$

Le vecteur normal à la surface de glissement est :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} y' \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2c)$$

et le tangentiel :

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2d)$$

Les vecteurs unitaires sont :

$$\bar{n}_0 = \frac{\bar{n}}{\sqrt{\bar{n}^2}} \quad \bar{t}_0 = \frac{\bar{t}}{\sqrt{\bar{t}^2}} \quad (2e, f)$$

ou $\sqrt{\bar{n}^2} = \sqrt{\bar{t}^2} = \sqrt{1 + y'^2} = ds \quad (2g)$

L'élément d'arc de la surface de glissement est :

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (2h)$$

Les conditions d'équilibre sont les suivantes :

L'équation vectorielle de la résultante des forces est :

$$\bar{J}_1 = \int_A^C (\sigma \bar{n}_0 + \tau \bar{t}_0) ds + \int_A^C \left[\frac{\bar{q}}{\cos \alpha} + \bar{j} \gamma (y - y_0) \right] dx = 0 \quad (3a)$$

L'équation vectorielle du moment des forces par rapport au point 0 est :

$$\bar{J}_2 = \int_A^C \bar{u} x (\sigma \bar{n}_0 + \tau \bar{t}_0) ds + \int_A^C \left[\bar{\rho} x \frac{\bar{q}}{\cos \alpha} + \bar{k} \gamma x (y - y_0) \right] dx = 0 \quad (3b)$$

La première comporte deux équations scalaires, la seconde une, comme suit :

$$\bar{J}_1 = \begin{cases} \int_A^C \left(\sigma y' + \tau + \frac{qx}{\cos \alpha} \right) dx = \int_A^C Q dx = 0 \\ \int_A^C \left[-\sigma + \tau y' + \frac{qy}{\cos \alpha} + \gamma (y - y_0) \right] dx = \int_A^C R dx = 0 \end{cases} \quad \dots (3c)$$

$$\bar{J}_2 = \begin{cases} 0 \\ \int_A^C \left\{ -y(\sigma y' + \tau) + x \left[-\sigma + \tau y' + \frac{qy}{\cos \alpha} + \gamma (y - y_0) \right] - y_0 \frac{qx}{\cos \alpha} \right\} dx = \int_A^C S dx \end{cases} \quad \dots (3d)$$

les termes sous le signe somme sont désignés par Q , R et S .

Pour les coefficients de Lagrange intervenant dans la condition de minimum, on peut prendre comme composantes des vecteurs :

$$\bar{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix}$$

L'équation vectorielle de minimum s'écrira :

$$\Omega = P_y + \bar{\lambda} \bar{J}_1 + \bar{\mu} \bar{J}_2 = \min ! \quad \dots (4a)$$

ou, en explicitant les composantes des vecteurs :

$$\begin{aligned} \Omega = & \int_A^C \frac{qy}{\cos \alpha} + \gamma (y - y_0) + \lambda_1 \left(\sigma y' + \tau + \frac{qx}{\cos \alpha} \right) + \lambda_2 \left[-\sigma + \tau y' + \frac{qy}{\cos \alpha} + \gamma (y - y_0) \right] + \\ & + \mu \left[-y(\sigma y' + \tau) + x \left(-\sigma + \tau y' + \frac{qy}{\cos \alpha} \right) + \gamma x (y - y_0) - y_0 \frac{qx}{\cos \alpha} \right] dx = \min ! \end{aligned}$$

En abrégéant :

$$\Omega = \int_A^C (P_y + \lambda_1 Q + \lambda_2 R + \mu S) dx = \min ! \quad \dots (4c)$$

Finalement, en regroupant les termes et en tenant compte de la relation de Coulomb :

$$\begin{aligned} \Omega = \int_A^C \left\{ (\lambda_1 - \mu y) y' - \lambda_2 - \mu x \right\} \sigma + \left[\lambda_1 - \mu y + (\lambda_2 + \mu x) y' \right] (\sigma \operatorname{tg} \varphi + c) + \\ + (1 + \lambda_2 + \mu x) \left[\frac{q_y}{\cos \alpha} + \gamma(y - y_0) \right] - \mu y_0 \frac{q_x}{\cos \alpha} \Big\} = \int_A^C F(\sigma, y, y') dx = \min ! \end{aligned} \quad (4d)$$

La fonction F sous le signe somme est fonction de deux fonctions inconnues $\sigma(x)$ et $y(x)$ et de la dérivée de la deuxième. L'intégrale définie est une fonction de fonctions. On peut donc déterminer la valeur du minimum par le calcul des variations. La solution dépend de la résolution de deux équations différentielles d'Euler.

La première s'écrit

$$F_\sigma - \frac{d}{dx} F_{\sigma'} = 0 \quad (5a)$$

En portant dans cette équation l'expression de F tirée de (4d) on a

$$\lambda_1 y' - \lambda_2 - \mu(y y' + x) + \operatorname{tg} \varphi [\lambda_1 + \lambda_2 y' - \mu(y - x y')] = 0 \quad (5b)$$

Dans le cas où : $\mu = 0$

on trouve :

$$\lambda_1 y' - \lambda_2 + \operatorname{tg} \varphi (\lambda_1 + \lambda_2 y') = 0$$

d'où :

$$y' = \frac{\operatorname{tg} \varphi \lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \operatorname{tg} \varphi \lambda_2}$$

dont la solution générale est :

$$y = \frac{\operatorname{tg} \varphi \lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \operatorname{tg} \varphi \lambda_2} x + b = ax + b \quad (5c)$$

a et b étant des constantes arbitraires.

La surface de glissement est donc plane dans ce cas.

Dans le cas où : $\mu \neq 0$

on peut diviser par μ l'équation (5b)

$$-\left(y - \frac{\lambda_1}{\mu}\right) y' - x - \frac{\lambda_2}{\mu} + \operatorname{tg} \varphi \left[-y + \frac{\lambda_1}{\mu} + \left(x + \frac{\lambda_2}{\mu}\right) y'\right] = 0 \quad (5d)$$

En faisant le changement de coordonnées défini par :

$$\eta = y - \frac{\lambda_1}{\mu} \quad \xi = x + \frac{\lambda_2}{\mu} \quad \dots (5e, f)$$

on obtient l'équation différentielle de la spirale logarithmique :

$$-\eta \eta' - \xi + \operatorname{tg} \varphi (-\eta + \xi \eta') = 0$$

En passant en coordonnées polaires :

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad \vartheta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{\xi} \quad (5g, h)$$

l'équation devient :

$$r' = r \operatorname{tg} \varphi$$

finalement sa solution générale est :

$$r = r_0 e^{\vartheta \operatorname{tg} \varphi} \quad \dots (5i)$$

ou r_0 est une constante arbitraire.

Les équations (5c) et (5i) conduisent à la conclusion que dans le cas de la déformation plane la surface de glissement ne peut être qu'un plan ou un cylindre ayant une spirale logarithmique comme directrice.

La deuxième équation d'Euler s'écrit

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad \dots (6a)$$

En portant dans cette équation la valeur de F tirée de (4d) on obtient après identification :

$$2\mu (\sigma \operatorname{tg} \varphi + c) + (\lambda_2 + \mu x) \operatorname{tg} \varphi \sigma' + (\lambda_1 - \mu y) \sigma' - \gamma (1 + \lambda_2 + \mu x) = 0 \quad \dots (6b)$$

Dans le cas où : $\mu = 0$, on obtient :

$$\lambda_2 \sigma' \operatorname{tg} \varphi + \lambda_1 \sigma' - \gamma (1 + \lambda_2) = 0$$

d'où

$$\sigma' = \gamma \frac{1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 \operatorname{tg} \varphi}$$

Enfin en désignant par a_1 et b_1 des constantes arbitraires la solution générale est :

$$\sigma = \gamma \frac{1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 \operatorname{tg} \varphi} x + b = \gamma a_1 + b_1 \quad \dots (6c)$$

en B la surface de glissement est composée. La droite \overline{AE} de la surface de glissement correspond à la droite \overline{AB} limitant le talus, et \overline{CD} à \overline{CB} . Le centre de la spirale ne peut être que B car elle se raccorde tangentiellement aux deux droites.

L'angle de \overline{AB} et de \overline{AE} est

$$\tau = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \quad (7a)$$

car \overline{AB} est la direction en A de la plus grande contrainte principale de compression. L'angle BCD est

$$\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \quad (7b)$$

parce que BC ne peut être que la direction de la plus petite contrainte principale, ici une traction.

La Fig. 2 montre que l'on a :

$$AEB \sphericalangle = \frac{\pi}{2} + \varphi; \quad BDC \sphericalangle = \frac{\pi}{2} - \varphi; \quad ABE \sphericalangle = \tau$$

$$CBD \sphericalangle = \psi; \quad \overline{AE} = r_E \quad \overline{CD} = r_D$$

La contrainte normale a la surface de glissement au point A est à la rupture :

$$\sigma_A = c \cos \varphi \quad \dots \quad (7c)$$

De même, au point C , dans le cas d'une surcharge q normale à BC :

$$\sigma_C = q(1 - \sin \varphi) - c \cos \varphi \quad (7d)$$

les contraintes aux points D et E deviendront alors :

$$p_{1D} = p_D - p_C = c_0 r_D^{-2} - \frac{c}{\sin \varphi} + \gamma \left(r_D \frac{f_D}{\cos \varphi} + c_1 \right) - \frac{q}{\operatorname{tg} \psi} + c = c_0 r_D^{-2} - c \frac{1 - \sin \varphi}{\sin \varphi} - \frac{q}{\operatorname{tg} \psi} + \gamma \left(r_D \frac{f_D}{\cos \varphi} + c_1 \right) \quad (7i)$$

$$p_{11D} = p_C = \frac{q}{\operatorname{tg} \psi} - c \quad \dots \quad (7j)$$

$$p_{1E} = p_E - p_A = c_0 r_E^{-2} - \frac{c}{\sin \varphi} + \gamma \left(r_E \frac{f_E}{\cos \varphi} + c_1 \right) - c = c_0 r_E^{-2} - c \frac{1 + \sin \varphi}{\sin \varphi} + \gamma \left(r_E \frac{f_E}{\cos \varphi} + c_1 \right) \dots \quad (7k)$$

$$p_{11E} = p_A = c \quad (7l)$$

Les conditions aux limites permettent ainsi de déterminer une partie des constantes d'intégration. Il reste comme constantes inconnues, r_0 pour la surface de glissement, et c_0 et c_1 pour la contrainte. Si la hauteur est donnée, r_0 est connu et la surcharge devient l'inconnue.

Pour déterminer les 3 constantes inconnues nous écrirons les 3 équations d'équilibre en tenant compte des relations suivantes (Fig. 3a et 3b) :

$$\vartheta_D = \psi - \varepsilon, \quad \vartheta_E = \beta - \tau, \quad \delta = \beta + \varepsilon - \frac{\pi}{2}, \quad r_E = r_D e^{\delta \operatorname{tg} \varphi} \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{1}{\operatorname{tg} \psi}, \quad \cos \psi = \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi}{2}}, \quad \sin \psi = \sqrt{\frac{1 + \sin \varphi}{2}}, \quad \cos \tau = \sin \psi \quad \sin \tau = \cos \psi \quad ds = \frac{r}{\cos \varphi} d\vartheta$$

La contrainte tangentielle étant :

$$\tau = \sigma \operatorname{tg} \varphi + c$$

Etant donné la simplicité du calcul nous calculerons les deux composantes de la contrainte sur la surface de glissement. L'une désignée par p est dirigée suivant le rayon de la spirale, l'autre, la cohésion c , est dirigée suivant la surface de glissement.

La première est donnée par :

$$p = \frac{\sigma}{\cos \varphi} \quad (7e)$$

sur la spirale logarithmique d'équation (6 h) on aura :

$$p = c_0 r^{-2} - \frac{c}{\sin \varphi} + \gamma \left(c_1 + r^2 \frac{f}{\cos \varphi} \right) \quad (7f)$$

avec

$$c_0 = \frac{c'_0}{\cos \varphi} \quad \text{et} \quad c_1 = \frac{c'_1}{\cos \varphi}$$

La composante p sur la surface plane de glissement se décompose en deux parties, l'une constante, l'autre variable.

D'après (7c) et (7d) les contraintes constantes en A et C seront

$$p_A = c \quad (7g)$$

$$p_C = \frac{q}{\operatorname{tg} \psi} - c \quad \dots \quad (7h)$$

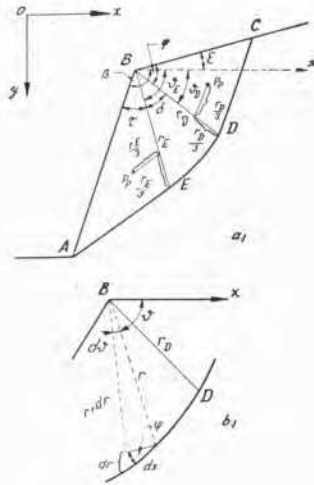


Fig. 3

L'équation d'équilibre des moments au point B est :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p_{IE}}{6} + \frac{p_{IIE}}{2} - c \right) r_E^2 \cos \varphi - c \int_{\vartheta_D}^{\vartheta_E} r^2 d\vartheta - \left(\frac{p_{ID}}{6} + \frac{p_{IID}}{2} + c \right) r_D^2 \cos \varphi + 2q r_D^2 \cos \psi + \\ & + \gamma \frac{r_E^3}{2} \cos \varphi \left[\frac{2}{3} \cos \vartheta_E - \frac{1}{3} \sin(\vartheta_E - \varphi) \right] + \frac{\gamma}{3} \int_{\vartheta_D}^{\vartheta_E} r^3 \cos \vartheta d\vartheta + \gamma \frac{r_D^3}{2} \cos \varphi \left[\frac{2}{3} \cos \vartheta_D + \frac{1}{3} \sin(\vartheta_D - \varphi) \right] = 0 \end{aligned} \quad (9a)$$

La résultante suivant ox est (Fig. 3) :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p_{IE}}{2} + p_{IIE} \right) r_E \cos \vartheta_E + c r_E \sin(\vartheta_E - \varphi) + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \int_{\vartheta_D}^{\vartheta_E} n r \cos \vartheta d\vartheta + \frac{c}{\cos \varphi} \int_{\vartheta_D}^{\vartheta_E} r \sin(\vartheta - \varphi) d\vartheta + \\ & 2q r_D \cos \psi \sin \varepsilon - \left(\frac{p_{ID}}{2} + p_{IID} \right) r_D \cos \vartheta_D + c r_D \sin(\vartheta_D - \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (9b)$$

La résultante suivant oy est :

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{p_{IE}}{2} + p_{IIE} \right) r_E \sin \vartheta_E - c r_E \cos(\vartheta_E - \varphi) - \frac{1}{\cos^2 \varphi} \int_{\vartheta_D}^{\vartheta_E} n r \sin \vartheta d\vartheta - \frac{c}{\cos \varphi} \int_{\vartheta_D}^{\vartheta_E} r \cos(\vartheta - \varphi) d\vartheta + \\ & + 2q r_D \cos \psi \cos \varepsilon - \left(\frac{p_{ID}}{2} + p_{IID} \right) r_D \cos \vartheta_D - c r_D \cos(\vartheta_D - \varphi) + \gamma \frac{r_E^2}{2} \cos \varphi + \frac{\gamma}{2} \int_{\vartheta_D}^{\vartheta_E} r^2 d\vartheta + \gamma \frac{r_D^2}{2} \cos \varphi = 0 \end{aligned} \quad (9c)$$

Les valeurs des intégrales indéfinies des équations précédentes sont :

$$\begin{aligned} c \int r^2 d\vartheta &= \frac{c}{2 \operatorname{tg} \varphi} r^2 & \frac{\gamma}{2} \int r^2 d\vartheta &= \frac{\gamma}{4 \operatorname{tg} \varphi} r^2 & \frac{\gamma}{3} \int r^3 \cos \vartheta d\vartheta &= \frac{\gamma}{3} r^3 \frac{\sin \vartheta + 3 \operatorname{tg} \varphi \cos \vartheta}{1 + 9 \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{\gamma}{3} r^3 f \\ \frac{1}{\cos^2 \varphi} \int n r \cos \vartheta d\vartheta &= \frac{\gamma}{\cos^2 \varphi} \int r^2 f \cos \vartheta d\vartheta + \frac{\gamma c_1}{\cos \varphi} \int r \cos \vartheta d\vartheta - \frac{2c}{\sin 2\varphi} \int r \cos \vartheta d\vartheta + \frac{c_0}{\cos \varphi} \int r^{-1} \cos \vartheta d\vartheta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\gamma r^2}{\cos^2 \varphi (1 + 9 \operatorname{tg}^2 \varphi)} \left(\frac{1 + 2 \sin^2 \varphi}{2} \cos^2 \vartheta + \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \cos \varphi \sin \varphi \sin 2 \vartheta \right) + \gamma c_1 r \sin (\vartheta + \varphi) - \\
&\quad - \frac{c}{\sin \varphi} r \sin (\vartheta + \varphi) + c_0 r^{-1} \sin (\vartheta - \varphi), \quad \frac{c}{\cos \varphi} \int r \sin (\vartheta - \varphi) d \vartheta = -c r \cos \vartheta \\
\frac{1}{\cos^2 \varphi} \int n r \sin \vartheta d \vartheta &= \frac{\gamma}{\cos^2 \varphi} \int r^2 f \sin \vartheta d \vartheta + \frac{\gamma c_1}{\cos \varphi} \int r \sin \vartheta d \vartheta - \frac{2c}{\sin 2 \varphi} \int r \sin \vartheta d \vartheta + \frac{c_0}{\cos \varphi} \int r^{-1} \sin \vartheta d \vartheta = \\
&= \frac{\gamma r^2}{4 \cos^2 \varphi \sin \varphi (1 + 9 \operatorname{tg}^2 \varphi)} \left[(1 - 4 \sin^2 \varphi) \cos \varphi \cos^2 \vartheta + (1 + 4 \sin^2 \varphi) \cos \varphi \sin^2 \vartheta - (1 - 4 \sin^2 \varphi) \sin \varphi \sin 2 \vartheta \right] - \\
&\quad - \gamma c_1 r \cos (\vartheta + \varphi) + \frac{c}{\sin \varphi} r \cos (\vartheta + \varphi) - c_0 r^{-1} \cos (\vartheta - \varphi), \quad \frac{c}{\cos \varphi} \int r \cos (\vartheta - \varphi) d \vartheta = c r \sin \vartheta \quad \dots \quad (10)
\end{aligned}$$

En substituant les expressions (7i), (7l) et (10), l'équation (9a) deviendra :

$$\begin{aligned}
&c r^2_E \frac{\cos \varphi}{2} + \frac{\gamma}{6} (r^2_E f_E + c_1 r^2_E \cos \varphi) - c r^2_E \frac{1 + \sin \varphi}{6 \operatorname{tg} \varphi} + c_0 \frac{\cos \varphi}{6} - c r_E \cos \varphi - c \frac{r^2_E}{2 \operatorname{tg} \varphi} + \\
c \frac{r^2_D}{2 \operatorname{tg} \varphi} - q r^2_D \frac{\cos \varphi}{2 \operatorname{tg} \psi} + c r^2_D \frac{\cos \varphi}{2} - \frac{\gamma}{6} (r^2_D f_D + c_1 r^2_D \cos \varphi) + c r^2_D \frac{1 - \sin \varphi}{6 \operatorname{tg} \varphi} + q r^2_D \frac{\cos \varphi}{6 \operatorname{tg} \varphi} - c_0 \frac{\cos \varphi}{6} - \\
&- c r^2_D \cos \varphi + 2 q r^2_D \cos^2 \psi + \gamma r^3_E \frac{\cos \varphi}{2} \left[\frac{2}{3} \cos \vartheta_E - \frac{1}{3} \sin (\vartheta_E - \varphi) \right] + \frac{\gamma}{3} (r^3_E f_E - r^3_D f_D) + \\
&\quad + \gamma r^3_D \frac{\cos \varphi}{2} \left[\frac{2}{3} \cos \vartheta_D - \frac{1}{3} \sin (\vartheta_D - \varphi) \right] = 0 \quad (11a)
\end{aligned}$$

(9b) deviendra :

$$\begin{aligned}
&-\gamma \left(r^2_E \frac{f_E}{\cos \varphi} + c_1 r_E \right) \frac{\cos \vartheta_E}{2} + c r_E \frac{1 + \sin \varphi}{2 \sin \varphi} \cos \vartheta_E - c_0 r_E^{-1} \frac{\cos \vartheta_E}{2} - c r_E \cos \vartheta_E + c r_E \sin (\vartheta_E - \varphi) \\
&- \frac{\gamma r^2_E}{2 \cos^2 \varphi (1 + 9 \operatorname{tg}^2 \varphi)} \left[(1 + 2 \sin^2 \varphi) \cos^2 \vartheta_E + 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta_E + \cos \varphi \sin \varphi \sin 2 \vartheta \right] - \gamma c_0 r_E^{-1} \sin (\vartheta_E + \varphi) \\
&\quad + c r_E \frac{\sin (\vartheta_E + \varphi)}{\sin \varphi} - c_0 r_E^{-1} \sin (\vartheta_E - \varphi) + \frac{\gamma r^2_D}{2 \cos^2 \varphi (1 + 9 \operatorname{tg}^2 \varphi)} \left[(1 + 2 \sin^2 \varphi) \cos^2 \vartheta_D + \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta_D + \right. \\
&\quad \left. + \cos \varphi \sin \varphi \sin 2 \vartheta \right] + \gamma c_1 r_D \sin (\vartheta_D + \varphi) - c r_D \frac{\sin (\vartheta_D + \varphi)}{\sin \varphi} + c_0 r_D^{-1} \sin (\vartheta_D - \varphi) - \\
&\quad - c r_E \cos \vartheta_E + c r_D \cos \vartheta_D + 2 q r_D \cos \psi \sin \varepsilon - \gamma \left(r^2_D \frac{f_D}{\cos \varphi} + c_1 r_D \right) \frac{\cos \vartheta_D}{2} + \\
&\quad + c r_D \frac{1 - \sin \varphi}{2 \sin \varphi} \cos \vartheta_D + q r_D \frac{\cos \vartheta_D}{2 \operatorname{tg} \psi} - c_0 r_D^{-1} \frac{\cos \vartheta_D}{2} - q r_D \frac{\cos \vartheta_D}{\operatorname{tg} \psi} + c r_D \cos \vartheta_D + c r_D \sin (\vartheta_D - \varphi) = 0 \quad (11b)
\end{aligned}$$

et finalement (9c) donnera :

$$\begin{aligned}
&-\gamma \left(r_E \frac{f_E}{\cos \varphi} + c_1 r_E \right) \frac{\sin \vartheta_E}{2} + c r_E \frac{1 + \sin \varphi}{2 \sin \varphi} \sin \vartheta_E - c_0 r_E^{-1} \frac{\sin \vartheta_E}{2} - c r_E \sin \vartheta_E - c r_E \cos (\vartheta_E - \varphi) \\
&- \frac{\gamma r^2_E}{4 \sin \varphi \cos^2 \varphi (1 + 9 \operatorname{tg}^2 \varphi)} \left[(1 - 4 \sin^2 \varphi) \cos \varphi \cos^2 \vartheta_E + (1 + 4 \sin^2 \varphi) \cos \varphi \sin^2 \vartheta_E - (1 - 4 \sin^2 \varphi) \sin \varphi \sin 2 \vartheta \right] +
\end{aligned}$$

La forme finale de (11c) sera :

$$\begin{aligned}
& -c_0 \frac{\cos \varphi}{2} \left\{ r_E^{-1} \cos \vartheta_E \left[-2 + \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \psi} - \operatorname{tg} \varphi \right) \operatorname{tg} \vartheta_E \right] + r_D^{-1} \cos \vartheta_D \left[2 + (\operatorname{tg} \psi + \operatorname{tg} \varphi) \operatorname{tg} \vartheta_D \right] \right\} - \\
& -c_1 \gamma \frac{\cos \psi}{2} \left\{ r_E \cos \vartheta_E \left[(\operatorname{tg} \psi + \operatorname{tg} \varphi) \operatorname{tg} \vartheta_E - 2 \right] + r_D \cos \vartheta_D \left[\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \psi} - \operatorname{tg} \varphi \right) \operatorname{tg} \vartheta_D + 2 \right] \right\} + \\
& + \frac{\cos \psi}{2} r_D \cos \varepsilon \left(3 + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \psi} \right) + c \frac{\cos \psi}{2 \operatorname{tg} \varphi} \left[-r_E \cos \beta (\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \psi + 3) + r_D \cos \varepsilon \left(\frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \psi} + 3 \right) \right] - \\
& - \frac{\gamma}{4 \operatorname{tg} \varphi (1 + 9 \operatorname{tg}^2 \varphi)} \left\{ r_E^2 \cos^2 \vartheta_E \left[\operatorname{tg}^2 \psi + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi \right] \operatorname{tg}^2 \vartheta_E - 2 \operatorname{tg} \varphi (1 - 3 \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \varphi) \operatorname{tg} \vartheta_E + (1 - 3 \operatorname{tg}^2 \varphi) \right\} \\
& - r_D^2 \cos^2 \vartheta_D \left[\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \psi} + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi \right) \operatorname{tg}^2 \vartheta_D - 2 \operatorname{tg} \varphi \left(1 + \frac{3 \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \psi} \right) \operatorname{tg} \vartheta_D + 1 - 3 \operatorname{tg}^2 \varphi \right] \left\{ + \right. \\
& \left. + \gamma \frac{\cos \varphi}{4} \left[r_E^2 \left(\frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \varphi} + 1 \right) + r_D^2 \left(1 - \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi} \right) \right] \right\} = 0
\end{aligned} \tag{12d}$$

En éliminant c_0 entre ces deux équations, et ensuite en tirant γc_1 de (12b), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& q \frac{\cos^2 \psi}{4} \cos (\beta + \varepsilon) \frac{r_D}{r_E} \left[-8 \operatorname{tg} (\beta + \varepsilon) + 3 \left(\operatorname{tg} \psi + \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} \right) \right] - \\
& - \frac{c}{\operatorname{tg} \varphi} \frac{\cos^2 \psi}{4} \cos (\beta + \varepsilon) \left[8 \operatorname{tg} (\beta + \varepsilon) - 3 \left(\operatorname{tg} \psi + \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} \right) \right] \left(\frac{r_D}{r_E} - \frac{r_E}{r_D} \operatorname{tg}^2 \psi \right) + \\
& + \frac{\gamma \cos \varphi}{4 (1 + 9 \operatorname{tg}^2 \varphi)} \left\{ r_E^{-1} \cos \vartheta_E \left[-2 + \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \psi} - \operatorname{tg} \varphi \right) \operatorname{tg} \vartheta_E \right] + r_D^{-1} \cos \vartheta_D \left[2 + (\operatorname{tg} \psi + \operatorname{tg} \varphi) \operatorname{tg} \vartheta_D \right] \right\} \\
& \left\{ r_E^2 \cos^2 \vartheta_E [2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_E + (\operatorname{tg} \psi + 3 \operatorname{tg} \varphi) \operatorname{tg} \vartheta_E + \operatorname{tg} \psi (\operatorname{tg} \psi + \operatorname{tg} \varphi)] - \right. \\
& - r_D^2 \cos^2 \vartheta_D \left[2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_D - \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \psi} - 3 \operatorname{tg} \varphi \right) \operatorname{tg} \vartheta_D + \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \psi} - \operatorname{tg} \varphi \right) \right] \left\{ + \right. \\
& + \frac{\gamma c_0}{8 \operatorname{tg} \varphi (1 + 9 \operatorname{tg}^2 \varphi)} \left[r_E^{-1} \cos \vartheta_E \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \psi} - \operatorname{tg} \varphi + 2 \operatorname{tg} \vartheta_E \right) + r_D^{-1} \cos \vartheta_D (\operatorname{tg} \psi + \operatorname{tg} \varphi - 2 \operatorname{tg} \vartheta_D) \right] \\
& \left[r_E^2 \cos^2 \vartheta_E \left\{ (\operatorname{tg}^2 \psi + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi) \operatorname{tg}^2 \vartheta_E - 2 \operatorname{tg} \varphi (1 - 3 \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \varphi) \operatorname{tg} \vartheta_E + 1 - \operatorname{tg}^2 \varphi \right\} - r_D^2 \cos^2 \vartheta_D \right. \\
& \left. \left\{ \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \psi} + 3 \operatorname{tg}^2 \varphi \right) \operatorname{tg}^2 \vartheta_D - 2 \operatorname{tg} \varphi \left(1 + 3 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \psi} \right) \operatorname{tg} \vartheta_D + (1 - 3 \operatorname{tg}^2 \varphi) \right\} + \sin \varphi (1 + 9 \operatorname{tg}^2 \varphi) \right. \\
& \left. \left\{ r_E^2 \left(\frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \varphi} + 1 \right) + r_D^2 \left(1 - \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi} \right) \right\} \right] - \frac{\cos^2 \varphi \cos \psi}{4} \cos (\beta + \varepsilon) \left\{ \frac{q}{\operatorname{tg} \psi} - \frac{c}{\operatorname{tg} \varphi} \left(\operatorname{tg} \psi - \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} \right) + \right. \\
& + \frac{4 \gamma \cos \psi}{1 + 9 \operatorname{tg}^2 \varphi} \left[\cos \beta (\operatorname{tg} \psi + \operatorname{tg} \varphi) (3 \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \beta) - \cos \varepsilon \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \psi} - \operatorname{tg} \varphi \right) (3 \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varepsilon) \right] \left\{ \right. \\
& \left. \left\{ \frac{r_D}{r_E} \left[8 \operatorname{tg} (\beta + \varepsilon) (1 - \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \varphi) - (6 \operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg}^2 \psi \operatorname{tg} \varphi + 9 \operatorname{tg} \varphi) \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{r_E}{r_D} \left[8 \operatorname{tg} (\beta + \varepsilon) (\operatorname{tg} \psi + \operatorname{tg} \varphi) - (6 \operatorname{tg} \psi - 9 \operatorname{tg}^2 \psi \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi) \right] \right\} \right\} \frac{1}{r_E^2 - r_D^2} = 0
\end{aligned} \tag{12e}$$

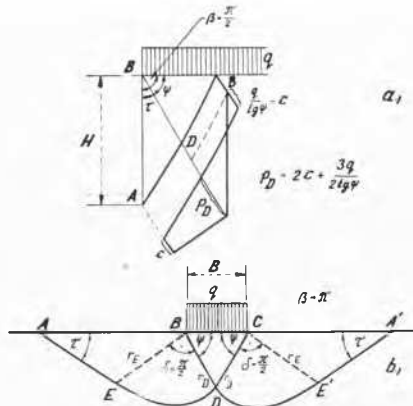


Fig. 5

Cette équation donne la relation entre l'angle, la hauteur, le poids et la surcharge q du talus. Elle conduit à deux cas connus :

1. Talus vertical (Fig. 5a).

On a donc :

$$\varepsilon = \delta = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad r_E = r_D \text{ et } r_D = \frac{H}{2 \sin \psi}$$

La hauteur du talus est donnée par :

$$H = \frac{4c}{\gamma} \operatorname{tg} \psi - \frac{2q}{\gamma}$$

2. Résistance au poinçonnement du sol (Fig. 5b).

On a donc :

$$\varepsilon = 0, \quad \delta = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \pi \text{ et } r_D = \frac{B}{2 \cos \psi}$$

L'équation (12e) donne l'expression de la résistance qf au poinçonnement :

$$q = qf = \gamma B \sin \varphi \frac{(1 + 3 \sin \varphi + 2 \sin^2 \varphi) \varepsilon^{\frac{3}{2} \pi^{18} \varphi} + (1 - 2 \sin \varphi) \cos \varphi}{(1 - \sin \varphi) (1 + 8 \sin^2 \varphi)} + \frac{c}{\operatorname{tg} \varphi} \left(\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \varepsilon^{\pi^{18} \varphi} - 1 \right)$$

Expression connue.

Références

- [1] KÖTTER, S. (1903). Die Bestimmung des Druckes an gekrümmter Gleitfläche. Berliner akad. Bericht.
- [2] KOPÁCSY, J. (1957). Three dimensional Stress Distribution and Slip Surfaces in Earth Works at Rupture. Proceedings of the Fourth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. London.
- [3] KOPÁCSY, J. Über die Bruchflächen und Bruchspannungen in den Erdbauten. Gedenkbuch für Prof. Dr. J. Jáky. Budapest. Edition d'Academia.
- [4] PRANDTL, L. (1920). Über die Härte plastischer Körper. Nachr. Ges. Wissensch. Göttingen.