

INTERNATIONAL SOCIETY FOR SOIL MECHANICS AND GEOTECHNICAL ENGINEERING



This paper was downloaded from the Online Library of the International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering (ISSMGE). The library is available here:

<https://www.issmge.org/publications/online-library>

This is an open-access database that archives thousands of papers published under the Auspices of the ISSMGE and maintained by the Innovation and Development Committee of ISSMGE.

Tassement d'une couche d'argile saturée d'eau sous l'effet d'une force concentrée à la surface du sol

Settlement of a Saturated Layer of Clay Under the Effect of a Point Load Acting on the Surface of the Soil

par J. MANDEL, docteur ès. sciences, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure des Mines, 60, boulevard St-Michel, Paris VI^e, France

Sommaire

L'auteur applique au problème fondamental du tassement d'une couche d'argile sous l'effet d'une force concentrée à la surface du sol la méthode générale qu'il a exposée dans un mémoire antérieur. Il obtient des formules résolvant théoriquement le problème. Les résultats coïncident avec ceux de la méthode classique de *Terzaghi* si la couche est mince. Ils en diffèrent si la couche est épaisse. L'auteur exploite les formules dans le cas d'une couche d'argile d'épaisseur infinie surmontée d'une couche perméable de coefficients d'élasticité différents. Les résultats numériques sont traduits par 3 abaques (Fig. 2-4) qui permettent de calculer le tassement à tout instant, à toute distance de la ligne d'action de la force, quels que soient la profondeur de la couche d'argile et les coefficients d'élasticité des deux couches.

Dans un mémoire antérieur (*Mandel, 1950*), nous avons indiqué la forme générale de la solution du problème de la consolidation d'un massif d'argile saturé d'eau.

Nous allons donner, par la méthode de calcul qui en découle, la solution du problème du tassement d'une couche d'argile sous l'effet d'une force normale concentrée à la surface du sol, problème fondamental puisque, par superposition, on en déduit le tassement de la couche sous un système quelconque de charges normales à la surface du sol. Mais auparavant nous rappellerons brièvement les hypothèses de base et la forme de la solution.

Hypothèses de base

Nous admettons que les déformations de l'ossature solide sont liées aux contraintes intergranulaires ou effectives par les relations linéaires classiques de la théorie de l'élasticité.

Le point le plus critiquable dans cette hypothèse paraît être la non-intervention des vitesses de déformation de l'ossature.

Summary

To the basic problem of the settlement of a layer of clay under the effect of a point load acting on the surface of the soil the author applies the general method which he has explained in a former paper. He obtains formulae which give a theoretical solution of the problem. For a thin layer the results are identical with those obtained by *Terzaghi's* classic method, but for a thick layer the results are different. The author applies the formulae in the case of a layer of clay whose thickness is infinite, covered with a permeable layer which has not the same coefficients of elasticity. The numerical results obtained can be shown by 3 charts (Figs. 2-4) which enable the settlement to be computed at any moment, at any distance from the axis of the load, irrespective of the depth of the layer of clay and the elasticity coefficients of the two layers.

Il est possible qu'en plus de la viscosité de l'eau libre traduite par la loi de *Darcy* existe une réactivité de l'ossature due à l'eau adsorbée par les grains.

Si l'on suppose qu'il n'y a pas de réactivité, la réversibilité des déformations peut encore être critiquée, le sens de la déformation pouvant intervenir indépendamment de sa vitesse. Cependant on sait qu'en déformation lente l'argile possède une réversibilité presque totale.

Quant à la linéarité des relations elle n'est évidemment qu'une approximation, mais cette approximation est acceptable pour de faibles déformations.

L'expérience indique que l'hypothèse précédente n'est pas valable au début de la consolidation. Elle entraîne en effet comme corollaire une déformation immédiate importante que l'on n'observe pas. Une telle déformation serait infiniment rapide et il n'est pas surprenant que l'hypothèse soit en défaut pour de grandes vitesses de déformation. Nous admettrons qu'elle devient valable au bout d'un temps assez faible vis-à-vis de la durée pratique de la consolidation.

Nous nous bornerons au cas d'un massif d'argile homogène et isotrope. Enfin nous considérerons la perméabilité de l'argile comme une constante indépendante de la déformation et du gradient hydraulique.

Equations générales

Des conditions d'équilibre d'un petit élément du sol, où l'on exprime les contraintes intergranulaires au moyen des relations classiques de l'élasticité, on déduit 3 relations dont la première s'écrit:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u - \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

u, v, w désignant les composantes du déplacement, x, y, z les coordonnées, Δ le laplacien, θ la dilatation cubique, q la variation de pression de l'eau à partir de l'état initial, λ, μ les coefficients de Lamé de l'ossature.

Exprimant d'autre part que la diminution de volume d'un élément du sol est égale au volume d'eau évacuée (car l'eau et les grains solides peuvent être considérés comme incompressibles vis-à-vis de l'assemblage des grains), on a d'après la loi de *Darcy*:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{K}{\gamma} \Delta q \quad (2)$$

K désignant la perméabilité de l'argile, γ le poids spécifique de l'eau.

De (1) et (2) on déduit:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = c \Delta \theta \quad \text{avec} \quad c = \frac{K(\lambda + 2\mu)}{\gamma} \quad (3)$$

Ainsi θ satisfait à l'équation de *Fourier*. Mais q ne satisfait pas en général à l'équation de *Fourier*.

Les équations (1) et (2) déterminent les 4 fonctions u, v, w, q de x, y, z, t lorsqu'on leur adjoint les conditions au contour et la condition initiale: $\theta(x, y, z, 0) = 0$ qui résulte du fait que le volume des vides ne peut varier instantanément puisque d'une part l'eau est incompressible, d'autre part elle ne peut être expulsée instantanément des vides.

De la linéarité des équations par rapport à u, v, w, q résulte la possibilité d'en superposer les solutions.

On envisagera seulement le cas d'une charge appliquée à l'instant 0 et maintenue constante par la suite, car par superposition le cas d'une charge évoluant d'une façon quelconque dans le temps s'en déduit.

Principe de la solution

Considérons:

1° Une solution indépendante de t , satisfaisant aux conditions à la limite. Cette solution $u_\infty(x, y, z), v_\infty, w_\infty, q_\infty$ définit l'état vers lequel tend le massif pour $t \infty$.

2° Des solutions de la forme $u^*(x, y, z)e^{-st}, \dots, q^*(x, y, z)e^{-st}$ satisfaisant aux conditions à la limite *rendues homogènes*. De telles solutions n'existent que pour certaines valeurs de s dites valeurs *propres*. On peut montrer que toutes les valeurs propres sont positives. On les rangera par ordre de grandeur croissante: $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \dots$. Ces valeurs forment un *spectre* discontinu si le domaine est fini et devenant continu lorsque le domaine devient infini.

Formons alors, dans le cas d'un spectre discontinu, la solution:

$$u(x, y, z, t) = u_\infty(x, y, z) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i u_i^*(x, y, z) e^{-s_i t}.$$

Elle satisfait aux conditions au contour et aux équations indéfinies. Il reste à satisfaire à la condition initiale qui s'écrit:

$$-\theta_\infty(x, y, z) = \sum_i A_i \theta_i^*(x, y, z).$$

Cette condition détermine les constantes A_i .

Dans le cas d'un spectre continu la solution prend la forme:

$$u = u_\infty(x, y, z) + \int_0^\infty \varphi(s) u^*(x, y, z, s) e^{-st} ds$$

et la condition initiale:

$$-\theta_\infty(x, y, z) = \int_0^\infty \varphi(s) \theta^*(x, y, z, s) ds$$

détermine la fonction $\varphi(s)$.

La solution est donc ramenée à celle de 2 problèmes indépendants:

- état d'équilibre définitif ($u_\infty \dots$): c'est un problème d'élasticité ordinaire;
- recherche des valeurs propres s_i et des fonctions propres u_i^* .

Nous allons maintenant appliquer la méthode précédente à l'étude de la consolidation d'une couche d'argile comprise entre 2 couches perméables lorsqu'une force concentrée normale P est appliquée à la surface libre du sol.

Etat d'équilibre définitif

La méthode pour résoudre ce problème a été indiquée par *Burmister* (1943), qui n'a développé le calcul que dans le cas d'un terrain formé de 2 couches ayant un coefficient de Poisson σ égal à $\frac{1}{2}$. Dans le cas le plus général cette méthode conduit pour θ à une expression de la forme

$$\theta = -\frac{P(1-2\sigma)}{2\pi\mu} \int_0^\infty [\varphi(mh)e^{-mz} + \psi(mh)e^{mz}] J_0(mr) m dm \quad (4)$$

z, r désignant les coordonnées dans le plan méridien ($0z$ ligne d'action de P), λ, μ les coefficients d'élasticité de la couche étudiée, h la distance de sa face supérieure à la surface du sol, J_0 la fonction de *Bessel*. Les fonctions φ et ψ dépendent de la couche étudiée, des épaisseurs relatives et des élasticités relatives des diverses couches.

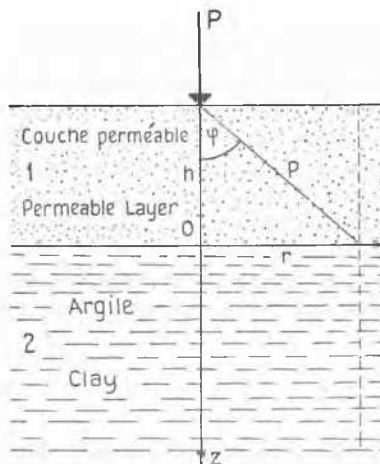


Fig. 1

Dans le cas de 2 couches de coefficients de Poisson σ_1, σ_2 quelconques (l'hypothèse $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2}$ envisagée par *Burmister* ne pouvant convenir au problème actuel puisqu'elle entraîne

$\theta = 0$ ce qui exclut toute consolidation) nous obtenons les résultats suivants:

L'origine 0 étant placée dans l'interface entre les 2 couches (Fig. 1), on a pour la couche inférieure 2: $\psi(mh) = 0$ et:

$$\varphi(mh) = (1 - N_2) \frac{e^{mh} - N_1(1 - 2mh)e^{-mh}}{e^{2mh} - (N_1 + N_2 + 4N_1m^2h^2) + N_1N_2e^{-2mh}} = g(mh) \quad (5)$$

en posant:

$$N_1 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2(3 - 4\sigma_1)} \quad N_2 = \frac{\mu_1(3 - 4\sigma_2) - \mu_2(3 - 4\sigma_1)}{\mu_1(3 - 4\sigma_2) + \mu_2}$$

De plus en un point de la surface libre $z = -h$, le déplacement vertical w (tassement) a pour expression:

$$w = \frac{P}{2\pi} \frac{1 - \sigma_2}{\mu_2} \int_0^\infty \gamma(mh) J_0(mr) dm \quad (6)$$

en posant:

$$\gamma(mh) = \frac{1 - \sigma_1}{1 - \sigma_2} \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{e^{2mh} + 4N_1mh - N_1N_2e^{-2mh}}{e^{2mh} - (N_1 + N_2 + 4N_1m^2h^2) + N_1N_2e^{-2mh}} \quad (7)$$

Pour $h = 0$ on a $g = 1$ et $\gamma = 1$ et l'on retrouve les résultats de la solution classique de *Boussinesq*¹⁾.

Il en est de même si les 2 couches différentes ont mêmes coefficients d'élasticité. Dans ce cas:

$$g(mh) = e^{-mh} \quad \gamma = 1 \quad \dots \quad (8)$$

Dans le cas d'une couche mince comprise entre 2 couches ayant mêmes coefficients d'élasticité, on trouve:

$$\varphi(mh) + \psi(mh) = \frac{1}{2(1 - \sigma)} \left[1 + mh - (2\sigma_1 - 1 + mh) \frac{\mu}{\mu_1} \right] e^{-mh} \quad (9)$$

les coefficients sans indice étant relatifs à la couche mince.

Recherche des solutions propres

La déformation de la couche d'argile entraînant une déformation des couches encaissantes, il n'est pas rigoureusement possible d'étudier séparément le tassement de la couche d'argile en fixant des conditions à la limite simples pour celle-ci. Cependant nous opérerons ainsi pour simplifier. Les conditions à la limite choisies seront les suivantes (les 2 premières sont rigoureuses):

- a) u et w nuls pour $r \infty$
- b) $q = 0$ sur les 2 faces de la couche.

Sur les 2 faces de la couche existent encore 2 autres conditions pour les contraintes et les déplacements. Les conditions rigoureuses étant d'une forme très compliquée nous les remplacerons par les 2 conditions simples suivantes:

c) Nous admettrons que la composante verticale de la contrainte en un point d'une face ne varie guère au cours de la consolidation de sorte qu'on peut poser $n_z = 0$; n_z désignant la variation de cette composante.

d) Pour la dernière condition, on peut envisager 2 cas extrêmes:

1° La rigidité des couches encaissantes est beaucoup plus grande que celle de la couche d'argile. Alors le déplacement radial u est faible sur les 2 faces et l'on peut poser: $u = 0$ sur les 2 faces.

¹⁾ D'après la relation:

$$\int_0^\infty e^{-mz} J_0(mr) dm = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \text{ pour } z \geq 0$$

2° La couche surmontant l'argile est mince et peu rigide. Dans ce cas on peut poser: $t_{rz} = 0$ sur la face supérieure, t_{rz} désignant le cisaillement sur cette face.

Cette condition est rigoureuse s'il n'y a aucune couche au-dessus de l'argile.

Nous n'indiquerons le développement des calculs que dans le premier cas qui conduit à des calculs simples.

Pour une solution propre l'équation (3) s'écrit:

$$c \Delta \theta^* + s \theta^* = 0 \quad \dots \quad (10)$$

La fonction:

$$\theta^* = A \sin nz \quad J_0(mr)$$

est solution de (10) pour $s = c(m^2 + n^2)$.

En prenant:

$$q^* = (\lambda + 2\mu)\theta^* = A(\lambda + 2\mu) \sin nz J_0(mr)$$

$$u^* = -\frac{K}{\gamma s} \frac{\partial q^*}{\partial r} = A \frac{m}{m^2 + n^2} \sin nz J_1(mr)$$

$$w^* = -\frac{K}{\gamma s} \frac{\partial q^*}{\partial z} = -A \frac{n}{m^2 + n^2} \cos nz J_0(mr)$$

on satisfait aux équations indéfinies (1) et aux conditions pour $r \infty$. On a:

$$n_z^* = A \left(\lambda + 2\mu \frac{n^2}{m^2 + n^2} \right) \sin nz J_0(mr).$$

L'origine étant placée dans la face supérieure de la couche d'argile, dont $2a$ désigne l'épaisseur on satisfait aux conditions q, u, n_z nuls pour $z = 0$ et $z = 2a$ en prenant $na = k \frac{\pi}{2}$

k entier.

Pour une de ces solutions propres, le tassement de la couche est:

$$T = w^*(0) - w^*(2a) = -A \frac{n}{m^2 + n^2} (1 - \cos 2na) J_0(mr).$$

Nul pour k pair, il est égal à $-\frac{2An}{m^2 + n^2} J_0(mr)$ pour k impair.

On a ainsi obtenu un spectre discontinu de valeurs de n et un spectre continu de valeurs de m , la continuité en m provenant de ce que le domaine de variation de r est infini.

Développement de θ_∞ . Tassement en fonction du temps

Le spectre en m étant continu on est amené à représenter θ_∞ par une intégrale en m : c'est précisément sous cette forme que nous le donne la formule (4). Pour achever la représentation de θ_∞ en somme de fonctions propres, nous devons représenter e^{-mz} et e^{mz} sous la forme d'une série:

$$e^{-mz} = A_1 \sin \frac{\pi z}{2a} + A_2 \sin \frac{2\pi z}{2a} + A_3 \sin \frac{3\pi z}{2a} + \dots$$

C'est une série de *Fourier* et l'on trouve, pour k impair:

$$A_k = e^{-ma} \frac{2n}{m^2 + n^2} \frac{chma}{a}$$

Les coefficients pour e^{mz} s'obtiennent en changeant m en $-m$.

Le tassement au temps t et à la distance horizontale r du point d'application de la force P est alors en négligeant le tassement différé des couches encaissantes:

$$T(r, t) = T(r, \infty) -$$

$$\frac{P(1 - 2\sigma)}{2\pi\mu a} \int_0^\infty \chi(mh) \sum_{k=1,3,5,\dots} \left[\frac{2n_k}{m^2 + n_k^2} \right]^2 e^{-(m^2 + n_k^2)ct} ch(ma) J_0(mr) m dm \quad (11)$$

en posant :

$$\chi(mh) = \varphi(mh)e^{-ma} + \psi(mh)e^{ma}$$

$$n_k = k \frac{\pi}{2a}$$

Enfin si $M_c = \lambda + 2\mu$ désigne le module de compression que l'on mesure à l'œdomètre :

$$\frac{1 - 2\sigma}{\mu} = \frac{2(1 - \sigma)}{M_c}$$

Dans le cas d'une couche d'argile d'épaisseur $2a$ très faible, on peut remplacer $ch(ma)$ par 1 et négliger m^2 devant n_k^2 de sorte que :

$$T(r, t) = T(r, \infty) - \frac{Pa(1-2\sigma)}{2\pi\mu} \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2\pi^2 ct}{4a^2}}}{k^2} \int_0^{\infty} \chi(mh) J_0(mr) m dm$$

D'après (4) :

$$\frac{P(1-2\sigma)}{2\pi\mu} \int_0^{\infty} \chi(mh) J_0(mz) m dm = -\theta_{\infty}$$

On a supposé : $u = 0$ sur les 2 faces de la couche, donc approximativement dans toute la couche. Par conséquent si $p(r)$ est la valeur de la pression normale s'exerçant sur la couche à la distance r :

$$-\theta_{\infty} = \frac{p(r)}{M_c}$$

de sorte que :

$$T(r, t) = T(r, \infty) - \frac{p(r)a}{M_c} \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2\pi^2 ct}{4a^2}}}{k^2}$$

Lorsque les 2 couches encaissantes ont mêmes coefficients d'élasticité, on peut obtenir ce résultat à partir de l'expression (9), où μ/μ_1 est supposé négligeable.

Nous retrouvons donc exactement, dans le cas d'une couche mince, le résultat que donne la méthode de *Terzaghi*. Il n'est plus de même pour une couche épaisse. Nous allons développer les calculs dans le cas extrême d'une couche d'épaisseur infinie.

Couche d'argile d'épaisseur infinie

Faisons tendre a vers l'infini. Nous savons que $\varphi(mh)$ tend vers $g(mh)$ défini par (5). Comme d'ailleurs la valeur de θ pour la face inférieure $z = -2a$ doit tendre vers 0, il faut que $\psi(mh)e^{2ma}$ tende vers 0. Donc $\chi(mh)ch(ma)$ tend vers $\frac{1}{2}g(mh)$.

D'autre part la somme :

$$S = \frac{m}{a} \sum_k \left[\frac{2n_k}{m^2 + n_k^2} \right]^2 e^{-(m^2 + n_k^2) ct}$$

s'écrit, en posant :

$$n_k = xm$$

$$S = \frac{1}{ma} \sum_k \left(\frac{2x_k}{1 + x_k^2} \right) e^{-m^2(1+x_k^2) ct}$$

L'intervalle de 2 valeurs successives de x est $\Delta x = \frac{\pi}{ma}$.

Quand a tend vers l'infini, S tend donc vers l'intégrale :

$$f(m\sqrt{ct}) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(1+x^2)m^2 ct}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[(1+2y^2) \int_y^{\infty} e^{-x^2} dx - ye^{-y^2} \right] \text{ où } y = m\sqrt{ct} \quad (12)$$

On en déduit :

$$T(r, t) = T(r, \infty) - \frac{P(1-2\sigma)}{4\pi\mu} \int_0^{\infty} g(mh) f(m\sqrt{ct}) J_0(mr) dm$$

$T(r, \infty)$ est défini par (6), $g(mh)$ par (5) (13)

Lorsqu'au lieu d'imposer la condition $u = 0$, on impose $t_{rz} = 0$ sur la face supérieure de la couche, on retrouve une expression de la forme (13), mais dans ce cas la fonction f dépend du coefficient de *Poisson* σ de l'argile. Pour $\sigma = \frac{1}{2}$ on retrouve pour f l'expression (12). Dans tous les cas $f = 1$ pour $t = 0$ et $f = 0$ pour $t \rightarrow \infty$ de sorte que :

$$T(r, \infty) - T(r, 0) = \frac{P(1-2\sigma)}{4\pi\mu} \int_0^{\infty} g(mh) J_0(mr) dm \quad (14)$$

Abaques

Nous poserons (Fig. 1)

$$\varphi = \text{arc tg} \left(\frac{r}{h} \right) \quad \varrho^2 = r^2 + h^2$$

et $mp = v$, de sorte que :

par (6) :

$$T(r, \infty) = \frac{P}{2\pi} \frac{1-\sigma}{\mu} \frac{K(\varphi)}{r}$$

par (14) :

$$T(r, \infty) - T(r, 0) = \frac{P}{4\pi} \frac{1-2\sigma}{\mu} \frac{L(\varphi)}{\varrho}$$

où :

$$K(\varphi) = \sin \varphi \int_0^{\infty} \gamma(v \cos \varphi) J_0(v \sin \varphi) dv$$

$$L(\varphi) = \int_0^{\infty} g(v \cos \varphi) J_0(v \sin \varphi) dv.$$

Lorsque la couche supérieure a mêmes coefficients d'élasticité que l'argile, on a : $K = L = 1$ quel que soit φ . Il en est de même pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ quels que soient les coefficients d'élasticité des 2 couches.

Les abaques I et II (Fig. 2, 3) donnent les valeurs de K et L en fonction de φ et du rapport $\varepsilon = \frac{\mu_1}{\mu}$ des coefficients d'élasticité des 2 couches; on a supposé pour les établir que les 2 couches avaient le même coefficient de *Poisson* σ égal à $\frac{1}{2}$.

Par (13), on a :

$$T(r, \infty) - T(r, t) = \frac{P(1-2\sigma)}{4\pi\mu} \frac{I\left(\varphi, \frac{\sqrt{ct}}{\varrho}\right)}{\varrho}$$

en posant :

$$I\left(\varphi, \frac{\sqrt{ct}}{\varrho}\right) = \int_0^{\infty} g(v \cos \varphi) f\left(v \frac{\sqrt{ct}}{\varrho}\right) J_0(v \sin \varphi) dv$$

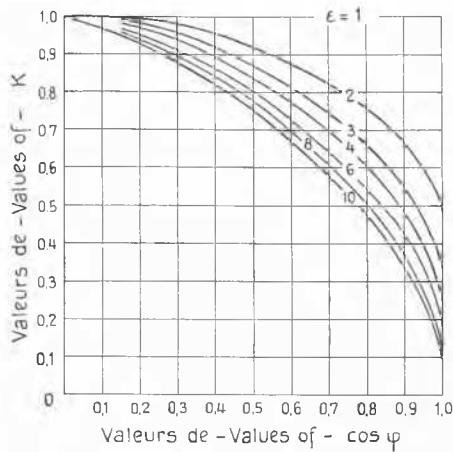


Fig. 2

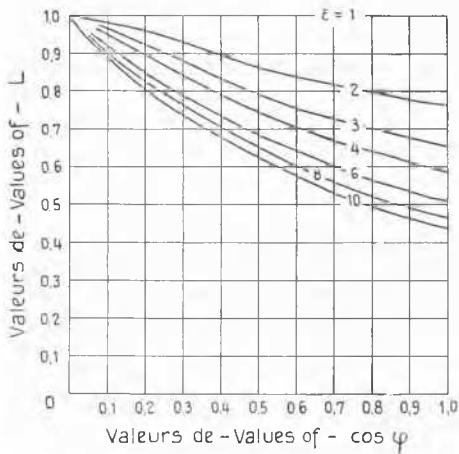


Fig. 3

Pour $t = 0$ $I = L$. Le rapport:

$$\delta \left(\varphi, \frac{\sqrt{ct}}{e} \right) = \frac{L - I}{L}$$

est donc le degré de consolidation à la distance horizontale r et au temps t . L'abaque III (Fig. 4) donne les valeurs de δ^1 en adoptant pour f l'expression (12), pour g l'expression (8), c'est-à-dire en supposant que la couche supérieure a les mêmes coefficients d'élasticité que l'argile ($\epsilon = 1$). Le calcul de δ n'a pas été fait pour $\epsilon \neq 1$. Nous admettons provisoirement que δ ne dépend guère de ϵ . En définitive on obtient le tassement au temps t et à la distance r par la formule:

$$^1) \text{ Pour } \frac{\sqrt{ct}}{e} > 2 \text{ on a sensiblement: } \delta = 1 - \frac{e}{\sqrt{ct}} \left(0,376 - \frac{e \cos \varphi}{8 \sqrt{ct}} \right)$$

$$T(r, t) = \frac{P}{2\pi\mu} \left\{ (1-\sigma) \frac{K(\varphi)}{r} - \left(\frac{1}{2} - \sigma \right) \left[1 - \delta \left(\varphi, \frac{\sqrt{ct}}{e} \right) \right] \frac{L(\varphi)}{e} \right\} \quad (15)$$

où K , L , δ sont donnés par les abaques I, II et III.

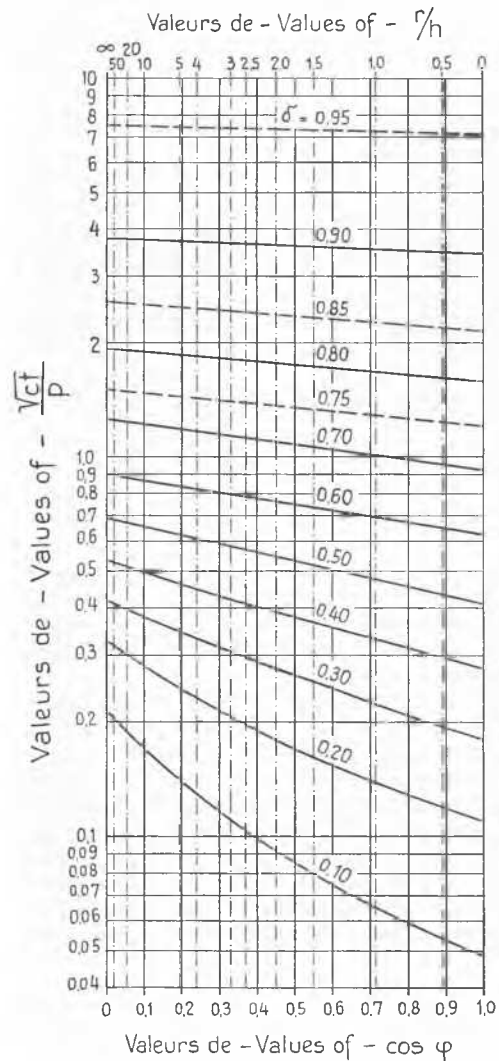


Fig. 4

Références

- Burmister, D. M.* (1943): Theory of Stress and Displacements in Layered Systems. Proc. 23rd annual meeting Highway Research Board, Nov.
Mandel, J. (1950): Etude mathématique de la consolidation des sols. Actes du Colloque international de mécanique de Poitiers, tome IV, 11 pages.